١٠



حکومەتی هەرێمی کوردستان- عێراق
وەزارەتی پەروەردە - بەڕێوەبەرایەتی گشتی پرۆگرام و چاپەمەنییەکان

بیرکاری بۆ هەمووان

کتێبی خوێندکار
پۆلی دەیەمی زانستی

چاپی هەشتەم
٢٠١٥ ز / ٢٧١٥ کوردی / ١٤٣٦ ک

ڕوانینێك بۆ دواوە

ئەم برانە هەژمێر بکە بەبەکارهێنانی ڕیزبەندی کردارەکان.

46 $3(2-(5-3)-7)+2$

47 $-(-5^2)^3$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

ئەم دەستەواژە بیرکاریانە چی دەگەیەنێت باسبکە.

48 $y>-5$

49 $-3<x<3$

50 $-1\leq y\leq 1$

51 $x\geq -3$

وانەی 3

لاسەنگەکان Inequalities



بۆچی

دەتوانین زۆر لە پێداویستییەکانی ژیانی ڕۆژانە بەبەکارهێنانی لاسنەگەکان ئەنجام بدەین. نموونەش بۆ ئەمە ڕێژەی چەوری کە پێویستە مرۆڤ لە خواردنیدا زیاد نەکات بۆ ئەوەی تووشی سەرئێشە نەبێت.

ئامانجەکان

- لاسەنگەی هێڵی بە یەك گۆڕاو دەنووسێت و بە جەبری وبە ڕوونکردنەوەیی شیکاری دەکات.
- لاسەنگە هێڵیە ئاوێتەکان بە یەك گۆڕاودا بە جەبری وبە ڕوونکردنەوەیی شیکاردەکات.

جێبەجێکردن

خواردن

یەك لە لێکۆڵینەوەکان دەریخستووە کە ئەو کەسانەی بڕی چەوری لە خواردنەکانیاندا کەمدەکەنەوە بۆ کەمتر لە 20% لە بەهای ئەو گەرمۆکە گەرمیەی دەیخۆن کەمتر تووشی سەرئێشان دەبن، ئەگەرهێمای c بۆ گەرمۆکەی گەرمی خواردنی تاکێك دابنرێت، پێویستە ژمارەی گەرمۆکەی چەوری F زیاتر نەبێت لە 20% ی c ئەمە بەڕێگای ڕستەی بیرکاری $F \le 0.2c$ دەردەبڕدرێن.

نموونەی ئەم جۆرە ڕستەیە پێیدەوترێت لاسەنگە **Inequality**.

بە شێوەیەکی گشتی هەر ڕستەیەکی بیرکاری ئەم هێمایانەی ($\le$;$\ge$;$<$;$>$) تێدابێت بریتییە لە لاسەنگە.

بۆ شیکاری لاسەنگەکان، سیفەتەکانی لاسەنگە لە نێوان ژمارە ڕاستییەکاندا بەکاربهێنە.

سیفەتەکانی لاسەنگە Properties of inequality

سیفەتی کۆکردنەوە **Addition Property**	ئەگەر $a \le b$ ، ئەوا $a + c \le b + c$
سیفەتی لێدەرکردن **Substraction Property**	ئەگەر $a \le b$ ، ئەوا $a - c \le b - c$
سیفەتی لێکدان **Multiplications Property**	ئەگەر $a \le b$ ، ئەوا $ac \le bc$ کاتێك $c > 0$
	، ئەوا $ac \ge bc$ کاتێك $c < 0$
سیفەتی دابەشکردن **Division Property**	ئەگەر $a \le b$ ، ئەوا $\frac{a}{c} \le \frac{b}{c}$ کاتێك $c > 0$
	، ئەوا $\frac{a}{c} \ge \frac{b}{c}$ کاتێك $c < 0$

ئەم سیفەتانەی سەرەوە بە ڕاستی دەمێننەوە بە بەکارهێنانی هێماکانی تری لاسەنگە.

کۆمەڵەی شیکاری **Solution Set** لاسەنگە بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی کە بە لەجیاتیدانانی لە لاسەنگەکەدا لاسەنگەکە ڕاست دەبێت.

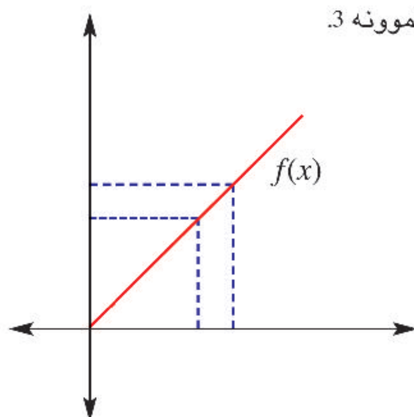
پەیوەندیەکی پێناسکراو بەهۆی خشتەوە نەخشە پێك ناهێنێت، ئەگەر ستوونی گۆڕاوی ئازاد بەهایەك بگرێتەخۆ لە بەرامبەری دوو بەهای جیاواز بۆ گۆڕاوی پەیوەست هەبێت.

لێرەوە پەیوەندی پێناسەکراو بەهۆی خشتەوە لە نموونەی یەکەم نەخشە نانوێنێت، چونکە بەهای گۆڕاوی ئازاد (خەسرەو) دوو بەهای جیاوازی گۆڕاوی بەستراو (ژمارەی تەلەفۆن) بەرامبەریەتی.

2. **ڕێسا Rule**: نەخشە پێناسەدەکرێت بەهۆی ڕێسایەك یان یاسایەك، کە بەهای گۆڕاوی پەیوەست بەپێی گۆڕاوی ئازاد دەردەبڕێت.

نموونە : نەخشەی نموونەی دووەم کاتێك بەهای گۆڕاوی پەیوەست A (ڕووبەری بازنە) دەردەبڕێت بەپێی گۆڕاوی ئازاد نت (نیوە تیرە) ئەم ڕێسایە ئەمەیە: $A(r)=\pi r^2$

3. **وێنەی ڕوونکردنەوەیی Graph** پێناسەدەکرێت بەهۆی وێنەی ڕوونکردنەوەیی کاتێك بەهای گۆڕاوی ئازاد لەسەر تەوەرەی سینەکان و بەهای گۆڕاوی پەیوەست لەسەر تەوەرەی صادەکان y بن. بەهای گۆڕاوی پەیوەست کە بەرامبەر بەهای گۆڕاوی x لە بەهاکانی گۆڕاوی ئازاد تانی ئەو خاڵە دیاریدەکات کە لەسەر وێنە ڕوونکردنەوەییەکەیە کاتێك پۆی سینی خاڵەکە دەکاتە x . نموونە: نەخشەی نموونە 3.



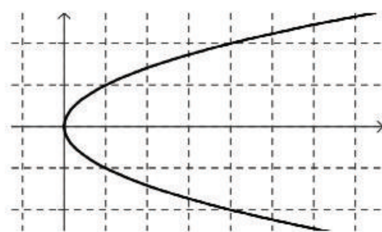
تاقیکردنەوەی ڕاستەهێڵی ستوونی Vertical Line Test

ئەگەر ڕاستەهێڵێکی ستوونی وێنەیەکی ڕوونکردنەوەی لە خاڵێك زیاتر بڕی، ئەوا ئەم وێنە ڕوونکردنەوەییە نەخشە نانوێنێت.

نموونە 2

أ ئایا وێنەی ڕوونکرنەوەیی بەرامبەر نەخشەیە؟ ڕوونبکەوە.

شیکار



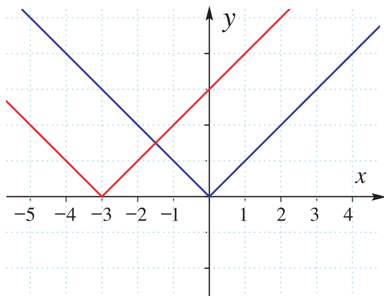
أ نەخێر نەخشە نیە چونکەبۆ هەر بەهایەکی موجەب x دوو بەهای گۆڕاو y بەرامبەرە ، هەروەها ڕاستەهێڵی ستوونی وێنەکە لە دوو خاڵی جیاواز دەبڕێت .

نموونــــه

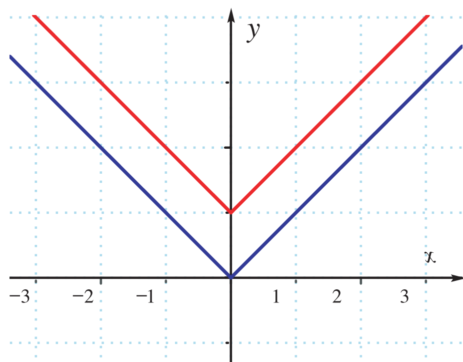
3 لەهەمان ڕووتەختی پۆتاندا هێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی بنەڕەت $y = |x|$ بکێشە لەپاشان جێگۆڕکێی گونجاو دیاربکە و بەکاربهێنە بۆ کێشانی هێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی پەیدابوو.

أ $y = |x + 3|$ ب $y = |x| + 1$

شیکار



أ زیادکردنی 3 بۆ گۆڕاوی x لە نەخشەی بنەڕەت دەبێتە ڕاکێشانی هێڵە ڕوونکردنەوەییەکە ئاسۆیی 3 یەکە بۆلای چەپ.



ب زیادکردنی 1 بۆ گۆڕاوی y لەنەخشەی (بنەڕەت) دایك دەبێتە هۆی ڕاکێشانی هێڵی ڕوونکردنەوەیی بەستوونی 1 یەکە بۆ سەرەوە.

ڕاهێـــــنـــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 جیهان خەملاندی کەخولەکێك تێپەڕبووە پاش 51 چرکە و ئاری خەملاندی کە خولەکێك تێپەڕبووە پاش 68 چرکە ڕوونیبکەوە چۆن بەراوردی بڕی دووهەڵەکە دەکەیت.

2 نموونەیەك لەسەر ژمارەی b بێنەوە پاساداتی $|b| = -b$ بکات ڕوونیبکەرەوە.

3 باسی ڕوونکردنەوەی نەخشەی بەهای ڕووت بکە.

4 ئایا بەهای ڕووتی ژمارەیەك دەکرێت سالب بێت؟ ڕوونیبکەرەوە.

5 ئایا بەهای ڕووتی ژمارەیەك دەکرێت بکاتە سفر؟ ڕوونیبکەرەوە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

هەژمێربکە.

6 $|5 - 12|$ 7 $|13 - 12|$ 8 $|-3 - 3|$ 9 $|4 - 4|$

10 بواری نەخشە و مەوداکەی دیاربکە پاشان هێڵی ڕوونکردنەوەی بکێشە.

أ $y = |x + 1|$ ب $y = |x| + 3$

11 لەهەمان ڕووتەختی پۆتاندا هێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی ڕووت $y = |x|$ بکێشە و هێڵی ڕوونکردنەوەیی هەریەك لەوسێ نەخشەیەش بکێشە. ئەو جێگۆڕکێ ئەندازەییە دیاربکە کە ڕێدەدات بە دەستکەوتنی هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی پێکهاتوو کە لە هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی دایك (بنەڕەت) دەردەچێت.

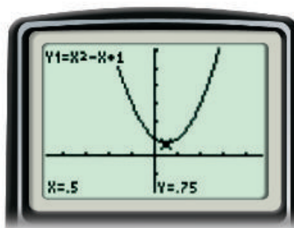
أ $y = |x + 1|$ ب $y = |x| + 1$ ج $y = -|x| + 1$

نموونە 2 ئایا سەری ئەم نەخشە دووجایە $f(x)=x^2-x+1$ گەورەترین یان بچووکترین بەها دەنوێنێت؟
دەتوانیت بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی یان خشتەی بەهاکان بەکاربهێنێت.

شیکار

ڕێگای یەکەم

دەتوانیت بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی «ئەگەر هەبێت» بەکاربهێنیت بۆ ئەوەی بۆت دەربکەوێت نەخشەکە بەهای بچووکترینی هەیە.



ئەگەر لە هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە وردبینەوە دەردەکەوێت کە پۆوتانی سەرەکەی $(0.5, 0.75)$

ڕێگای دووەم

دەتوانیت بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنیت بۆ دروست کردنی خشتەی بەهاکانی نەخشەکە. لەخشتەکەوە دەردەکەوێت نەخشەکە دەگاتە بچووکترینی بەهاکەی کاتێك $x=0.5$ ، بێت و ئەم بچوکترین بەهایەش دەکاتە 0.75 .

X	Y1
-2.00	7.00
-1.50	4.75
-1.00	3.00
-.50	1.75
0.00	1.00
.50	.75
1.00	1.00

X=.5

لەخشتەکەوە دەردەکەوێت سەری برگە هاوتاکە بریتییە لە خاڵی $(0.5, 0.75)$



هەوڵ بدە ئایا سەری نەخشە دووجای $f(x)=-2x^2-4x+1$ گەورەترین یان بچووکترین بەها دەنوێنێت؟

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە ئایا دەتوانیت هاوکێشەی تەوەری هاوجێبوونی نەخشەی دووجای $f(x)=x^2-x+1$ دیاری بکەیت ئەگەر زانیت کە $f(0)=f(1)$ ؟

دەتوانیت بە سەرنجدان لە نیشانەی هاوکۆلکەی a ،بزانیت کە نەخشە دووجای $f(x)=ax^2+bx+c$ بەهای گەورەترین یان بچووکترین هەیە.

بەهای گەورەترین یان بچووکترین؟ Maximum and Minimum values

- ڕوونکردنەوەیی نەخشە دووجای $f(x)=ax^2+bx+c$ کاتێك a و b و c ژمارەی ڕاستی بن و $a \neq 0$ بریتییە لە برگەی هاوتا.
- ئەگەر a هاوکۆلکەی x^2 موجەب بێت ئەوا برگە هاوتاکە کراوەیە بەرەوە سەرەوە. و سەرەکەی نزمترین خاڵی برگەکەیە وبەهای y تیایدا بچووکترین بەهای نەخشەکەیە.
- ئەگەر a هاوکۆلکەی x^2 سالب بێت ئەوا برگە هاوتاکە کراوەیە بەرەوە خوارەوە. و سەرەکەی بەرزترین خاڵی برگەکەیە وبەهای y تیایدا گەورەترین بەهای نەخشەکەیە.
- بەهای y ی سەری برگە هاوتاکە دەبێتە ئەوپەڕی بەهای نەخشەکە، بەهای ئەوپەڕییەکە دەبێتە گەومرترین یان بچووکترین بەها.

نموونە 3 ئەم برگە هاوتایانە بەرەو سەرەوە یان خوارەوە کراوەن. ئایا سەرەکەشی گەورەترین یان بچووکترین بەها دەنوێنێت؟

أ $f(x)=x^2+x-6$

ب $f(x)=5+4x-x^2$



شیتەڵکردنی ڕادەدارەکە بووە هۆی شیکارکردنی هاوکێشەکەی پێشوو، برەکە شیتەڵ بوو بۆ ئەنجامی لێکدانی 3 کۆلکە، لەمەوە هاوکێشەکە 3 شیکار یان 3 ڕەگی جیاوازی هەیە. بەڵام لەهەندێ هاوکێشەی ڕادەدار ڕەگەکان دووبارە دەبنەوە وەك لەم نموونەیەدا دەردەکەوێت:

نموونە 2

هاوکێشەی $x^3-7x^2+15x-9=0$ بەبەکارهێنانی ڕوونکردنەوەیی و دابەشکردنی بژمێری و شیتەڵکردن شیکاربکە.

شیکار هێڵکاری ڕوونکردنەوەی نەخشەی $y=x^3-7x^2+15x-9$ بەکاربهێنە بۆ خەمڵاندنی ڕەگەکانی هاوکێشەکە. لە هێڵکاریەکەوە ڕوون دەبێتەوە کە 1 یەکێك لە سفرەکانی نەخشەکەیە، دەشتوانین دڵنیا بین لەوە بەدانانەوەی بەهاکە لە جیاتی x . بیردۆزی هاوکۆلکە ودابەش کردنی بژمێری بەکاربهێنە بۆ دابەش کردنی $x^3-7x^2+15x-9$ بەسەر $x-1$.

کەواتە،

$$x^3-7x^2+15x-9=(x-1)(x^2-6x+9)$$

$$=(x-1)(x-3)^2$$

$x-1=0$ یان $x-3=0$ یان $x-3=0$

$x=1$ یان $x=3$ یان $x=3$

ڕەگەکانی هاوکێشەی $x^3-7x^2+15x-9=0$ بریتیین لە 1 و 3 ورەگی 3 دووجار دووبارە بۆتەوە.

1	1	−7	15	−9
		1	−6	9
	1	−6	9	0

ماوە= 0

ئەنجامی دابەش بریتییە لە x^2-6x+9

هەوڵبدە هاوکێشەی $x^3+2x^2-4x-8=0$ بە ڕوونکردنەوەیی ودابەشکردنی بژمێری وشیتەڵکردن شیکاربکە.

لەوانەیە کۆلکەی $(x-a)$ لە شیتەڵکردنی ڕادەدارێکی وەك y دووبارە ببێتەوە وەك لە نموونەی پێشوودا بینرا. لەم بارەدا دەوترێت a **ڕەگێکی دووبارەیە Multiple Root** . بە ژمارەی ئەو جارانەی کە $(x-a)$ تیا دووبارە دەبێتەوە لەو هاوکێشەی $P(x)=0$ دەوترێت پلەی دووبارەبوونەوەی ڕەگی a . ڕەگی 3 لە هاوکێشەکە ڕەگێکی دووبارەبوونەوەی پلە دووە. کاتێك ڕەگی a لە ڕادەدارێکدا دووبارە دەبێتەوە واتا هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە لە تەوەری x دەکەوێت لە خاڵی $(a,0)$ بێ ئەوەی بیبڕێت. ناشتوانین بڵێین خاڵی لێکەوتن هەمیشە ڕەگێکی دووبارە بوونەوەیە. لەبەر ئەوەی هێڵکاری ڕوونکردنەوەیەکە ئەوەندە وورد نییە کە ئەمەی لێ دەرئەنجام بدەین. دەتوانین هەندێك ڕادەدار شیتەڵبکەین بە دانانی گۆڕاوێکی تر لە جیاتی گۆڕاوە بنەڕەتییەکە وەك لەم نموونەدا دەردەکەوێت.

نموونە 3

هاوکێشەی $x^4-4x^2+3=0$ بە شیتەڵکردن شیکاربکە.

شیکار

شیکارکردنی پرسیارەکان

1. **شیکارکردنی پرسیارێکی سادەتر:** دەتوانین ڕادەداری x^4-4x^2+3 بگۆڕین بۆ ڕادەدارێکی دووجا بە دانانی $y=x^2$ لە جیاتی گۆڕاوە بنەڕەتییەکە، ئەو کاتە ڕادەدارەکە دەبێتە y^2-4y+3

$$x^4-4x^2+3=0$$

$$(x^2)^2-4(x^2)+3=0$$

$$y^2-4y+3=0$$

$$(y-1)(y-3)=0$$

$y=1$ یان $y=3$

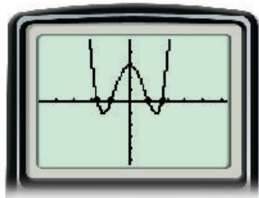
2. x^2 له جیاتی y دادەنێین پاشان بەهای x بدۆزەرەوە کە ڕەگەکان هاوکێشە بنەڕەتییەکە دیاریدەکەین

$x^2 = 1$ یان $x^2 = 3$

$x = \pm 1$ یان $x = \pm\sqrt{3}$

ڕەگەکانی هاوکێشە بنەڕەتییەکە بریتییە لە $x = -1$ $x = 1$ $x = -\sqrt{3}$ $x = \sqrt{3}$

ساغبکەوە



هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y = x^4 - 4x^2 + 3$ بکێشە و سەرنجی سفرەکانی نەخشەکە بدە دەبینیت هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە تەوەری سینی دەبڕێت لە -1 و 1 و لە دوو خاڵی هاوجێ بە پێی تەوەرەی صادەکان لە $-\sqrt{3} \approx -1.7$ وە $\sqrt{3} \approx 1.7$ دەنوێنن.

هەوڵبدە هاوکێشەی $x^4 - 9x^2 + 14 = 0$ بە شیتەڵکردن شیکاربکە.

ژمارەی ڕەگەکانی هاوکێشەی ڕادەدار Number of Roots for Polynomial Equation

لە نموونەکانی پێشوو دەرکەوت ژمارەی ڕەگەکانی هاوکێشەی پلە سێ بریتییە لە 3 ڕەگە و ژمارەی ڕەگەکانی هاوکێشەی پلە چوار دەبێتە 4 ڕەگ بەڵام ئەمە بە گشتی ڕاست نییە.

نموونە 4 هاوکێشەی $x^4 - 1 = 0$ شیکاربکە.

شیکار

$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$ جیاوازی نێوان دوو دووجا

$= (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$

ناتوانین کۆڵکەی $x^2 + 1$ شیتەڵبکەین لەبەر ئەوەی ئەم ڕادەدارە لە ژمارە ڕاستییەکاندا هیچ سفرێکی نییە چونکە x^2 ژمارەیەکی سالب نابێت.

کەواتە، ژمارەی ڕەگەکانی هاوکێشەی $x^4 - 1 = 0$ تەنها دوو ڕەگە.

لاسەنگە ڕادەدارەکان Polynomial Inequalities

نموونە 5 لاسەنگەی $x^4 - 4x^2 < 0$ شیکاربکە.

شیکار



هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y = x^4 - 4x^2$ بکێشە لە هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەکەوە دەردەکەوێت کە -2 و 0 و 2 سفرەکانی نەخشەکەن و بەهای نەخشەکە سالب دەبێت کاتێك x بەهای -2 و 2 وەردەگرێت جگە لە سفر واتا $-2 < x < 2$ جگە $x \neq 0$.

هەوڵ بدە لاسەنگەی $x^4 - 4x^2 \leq 0$ شیکاربکە.

ڕاهێـــنــــان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1 ئەو پەیوەندیانە ڕوونبکەوە کە سفری نەخشەکە ورەگی هاوکێشەکە و هاوکۆلکەی ڕادەدارو خاڵی یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری سینی بەیەکەوە دەبەستێتەوە.

2 چی دەڵێیت دەربارەی سفرەکانی نەخشەیەکی ڕادەدار لە جۆری $y=(x-3)^n$ ؟

ڕاهێنانی ئاڕاستە کراو

بە شیتەڵکردن ئەم هاوکێشانە شیکاربکە.

3 $x^3-x^2-12x=0$

4 $x^3+15x^2+54x=0$

هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ودابەشکردنی بژمێری وشیتەڵکردن بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی هەموو ڕەگەکانی هاوکێشەکانی.

5 $x^3-5x^2+3x=0$

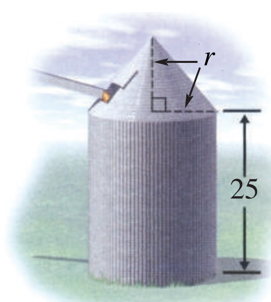
6 $x^3-3x-2=0$

بە هۆی گۆڕاوێکی نوێ وشیتەڵکردن ڕەگەکانی ئەم هاوکێشانە بدۆزەوە.

7 $x^4-8x^2+16=0$

8 $x^4-2x^2+1=0$

9 ئەگەر نەخشەی $V(r)=\frac{1}{3}\pi r^3+25\pi r^2$ قەبارەی سایلۆیەکی دانەوێڵە بنوێنێت وەك لە شێوەی بەرامبەردا هاتووە کاتێك r نیوە تیرەی بنکەی لولەکەکە بێت بە مەترە، نیوە تیرەی بنکەی لولەکەکە هەژمێر بکە بۆ نزیکترین دە نزیکبکەوە، ئەگەر قەبارەی سایلۆکە $2\,042m^3$ بێت.



ڕاهێنان وجێبەجێکردن

بە شیتەڵکردن ڕەگەکانی ئەم هاوکێشانە دیاریبکە.

10 $x^3+2x^2-35x=0$

11 $x^3+2x^2-48x=0$

12 $x^3-13x^2+40x=0$

13 $x^3-7x^2+10x=0$

14 $x^3=25x$

15 $y^3=49y$

16 $2x^3-10x^2-100x=0$

17 $16x-6x^2-x^3=0$

18 $3y^3+9y^2-162y=0$

19 $20d^2+5d^3-60d=0$

20 $110x-2x^3=12x^2$

21 $3y^3+36y^2=3y^4$

به شیتەڵکردن ڕەگەکانی ئەم هاوکێشانە دیاریبکە.

22 $d^3-d^2-5d-3=0$

23 $x^3+5x^2+7x+3=0$

24 $2b^3+16b^2+32b=0$

25 $5d^3-60d^2+180d=0$

26 $x^3-3x-2=0$

27 $x^3-3x+2=0$

28 $x^3-2x^2-9x=-18$

29 $x^3+3x^2-4x-12=0$

30 $n^3+8=2n^2+4n$

31 $x^3+3x^2=27+9x$

به هۆی گۆڕاوێکی نوێ و شیتەڵکردن ڕەگەکانی ئەم هاوکێشانە دیاریبکە.

32 $x^4-4x^2+4=0$

33 $x^4-6x^2+9=0$

34 $y^4-18y^2+81=0$

35 $b^4-24b^2+144=0$

36 $x^5-9x^3+8x=0$

37 $b^5-28b^3+27b=0$

38 $x^4-12x^2=-36$

39 $x^4-14x^2=-49$

40 $d^4+12=7d^2$

41 $n^4+14=9n^2$

42 دەروازەیەك لەسەر ڕۆشەنبیری: خەڵکی عمر خیام وەك شاعیرێکی نووسەری دیوانی چوارینەکان دەناسن، بەڵام هەندێکی کەمیان دەزانن کە ئەم مرۆڤە یەکێك بووە لەو زانایانەی کە لە بیرکاریدا کاریان کردووە. ئەم زانایە ڕێگایەکی پێش خست بۆ دیارکردنی سفرەکانی ئەو نەخشە ڕادەدارانەی بەم شێوەیە دەنووسرێت $f(x)=x^3-bx-a$ کاتێك کە $b>0$ و $a>0$ بەهۆی دۆزینەوەی پۆتانی خاڵەکانی یەکتربڕینی هێڵی ڕوونکردنەوەیی هەندێ نەخشەی ناسراو لەگەڵ تەوەرەی سینیەکان.

أ بەهای a و b لەم نەخشەدا چەندە $f(x)=x^3-7x-6$

ب هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە بکێشە بە بەکارهێنانی بەهاکانی b و a کە لە پرسیاری پێشوودا دۆزیتەوە $y=-\frac{1}{\sqrt{b}}x^2$ و $y=\sqrt{x^2+\frac{a}{b}x}$ و $y=-\sqrt{x^2+\frac{a}{b}x}$

ج جگە لە سفر پۆتانە جیاوازەکانی خاڵی یەکتربڕینی هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکانی کە سفری نەخشەی $f(x)$ دەنوێنین دیاریبکە.

د هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی $f(x)=x^3-7x-6$ بکێشە و سفرەکانی دیاریبکە ولە ساغکردنەوەی پرسیاری پێشوو دڵنیا بە.



43 **پیشە سازی** سندوقێکی تەختە پانییەکەی x وەرێژییەکەی 3 ئەوەندەی پانییەکەیی وبەرزییەکەش 1ی لە پانییەکەی زیاترە، دڵنیابە لەوەی نەخشەی $V(x)=3x^3+3x^2$ قەبارەی سندوقەکە دەگەیەنێت. دوورییەکانی سندوقەکە دیاری بکە کاتێك قەبارەکەی 36 بێت.

44 **پزیشکی** گولاجێکی ڤیتامین شێوەی لولەکێکی بازنەیی وەستاوی هەیە کە دوو نیوەگۆ لەهەردوو سەرەکانییەتی. ئەگەر نەخشەی $V(r)=10\pi r^2+\frac{4}{3}\pi r^3$ قەبارەی دەنکە گولاجەکە بنوێنێت کاتێك r نیوەتیرەی بنکەی لولەکەبێت بە ملیمتر. نیوەتیرەی گولاجێك چەندە کاتێك قەبارەکەی 160mm^3 بێت.

ڕوانینێك بۆ دواوە

پۆتانی خاڵە شلۆقەکانی ئەم نەخشانە دیاریبکە، ئەوپەڕی بەهاکانیان بە نزیکراوەی بنووسە، پاشان ناوچەکانی ڕوو لە زیادبوون وڕوو لەکەمبوون دیاریبکە.

45 $y=6x^2-x-12$

46 $y=2x^2+5x+2$

47 $y=x^2+3x-2$

48 $y=x^3-3x^2+4x-5$

ئەمانەی خوارەوە بە دابەشکردنی بژمێری بدۆزەرەوە.

49 $(3x^4-4x^2+2x-1)\div(x-1)$

50 $(x^4+4x^3+5x^2-5x-14)\div(x+2)$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

51 ئەم بڕە بە بەکارهێنانی شیتەڵکردن کورتبکەوە $\frac{x^2+5x+6}{x^2+7x}\times\frac{x^2-2x}{x^2-4}$.

نموونە* (سامپڵ) چییە؟

What is the Sample?

لەکاتی کارکردنت لەم پرۆژەیەدا ئەو نەخشەڕادە دارانە دەدۆزیتەوە کە دەبنە سامپڵی جۆراوجۆری شێوە دەفرییەکان. هەڵدەستیت بە تێکردنی ئاو بۆ ناو دەفرێك بەقەبارەیەکی دیاریکراو و پێوانی بەرزی وقەبارەکەی، لە هەموو زیادکردنێکدا ئەم تاقیکردنەوەیە دووبارە بکەرەوە تا دەفرەکە پڕ دەبێت، بەمەش کۆمەڵێك جووتی ڕێکخراوی جیاوازت دەست دەکەوێت لەسەر ڕووتەختی پۆتانەکان بیاننوێنە.





*سامپڵ = نموونە (نموذج)

چالاکی 1

1. قەبارەی دەفرەکە دیاریبکە. قەبارەکە دابەش بکە بۆ 10 بەش ئەنجامی دابەشەکە لە نزیکترین ژمارەی تەواو نزیك بکەوە (بۆ نموونە: ئەگەر قەبارەی دەفرەکە $347mm^3$ بێت بە دابەش کردنی بەسەر 10 دا ژمارە 34.7 دەست دەکەوێت نزیکیبکەوە لە 35).
2. 10 جار ئاو بۆ دەفرەکە زیاد بکە، لەهەر جاریکدا قەبارەی زیادکراو($35mm^3$) لە نموونەی پێشوودا گۆڕانەکان کە بەسەر قەبارەی ئاوەکە وبەرزیەکەی دادێت دوای هەموو زیاد کردنێك تۆمار بکە. لەخشتەیەکی وەك خشتەکەی بەرامبەرت گۆڕانی قەبارەی ئاوەکە و بەرزیەکەی لە ناو دەفرەکەدا تۆمار بکە. ئەم کردارە تا دەفرەکە پڕ دەبێ دووبارە بکەرەوە.

قەبارە (mm^3)	بەرزی (Cm)	
		1
		2
		3
		4
		5
		6
		7
		8
		9
		10

چالاکی 2

1. پێدراوە تۆمار کراوەکانی خشتەی پێشوو بەکاربهێنە. جووتە ڕێکخراوەکان لەسەر ڕووتەختی پۆتانەکان بنوێنە ، وای دابنێ قەبارە x وبەرزی y بێت.
2. پێدراوەکانی خشتەی پێشوو لە بژمێری ڕوونکردنەوەیی (ئەگەر هەبێت) تۆماربکە داوا لە بژمێرەکە بکە دوو سامپلی جیاوازت بداتێ کە جووتە ڕێکخراوەکانی پێشوو بنوێنن. سامپلی یەکەم نەخشەیەکی ڕادەداری پلە 3 بێت ودووەم نەخشەیەکی دووجابێت.
3. بۆ بەراوردکردنی دوو سامپلەکە هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی هەردووکیان لەسەر ڕووتەختی پۆتانەکان بکێشە.ئەوەیان هەڵبژێرە کە پێت ڕاستترە لەوی تریان(ئەوەی کە نزیکترە لە نواندنی جووتە ڕێکخراوەکە).
4. ئایا دەتوانیت ئەم سامپلە بەکاربێنیت بۆ خەملاندنی بەرزی ئاوی دەفرەکە بە تێکردنی قەبارەی جیاواز لە ئاوی خشتەی پێشوو؟ ڕوونیبکەوە.



4
پێداچوونەوەی بەش

بەهای ئەم ڕادەدارانە هەژماربکە کاتێك $x = 2$ ، $x = -1$.

1 $-x^3 + 4x^2 - 2$

2 $x^3 + 2x^2 - 1$

3 $x^4 - 22$

4 $19 - x^3 - x^2$

کۆکردنەوە یان لێدەرکردن بکە پاشان ئەنجام بە سادەترین شێوە بنووسە

5 $(3x^3 - 5x^2 + 8x + 1) + (11x^3 - x^2 + 2x - 3)$

6 $(7x^3 - 8x^2 + 2x - 3) - (x^3 + x^2 - 6)$

هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە بکێشە.ئایا نەخشەکە بەهای گەورەترین یان بچووکترینی هەیە، بەهای نزیکەییان بنووسە. ناوچەی ڕوو لە زیادبوون وروو لەکەمبوونیان بنووسە.

7 $f(x) = x^2 - 2x + 9$

8 $f(x) = -x^2 + 5x - 4$

9 $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 1$

10 $f(x) = -2x^3 + x^2 - 9$

لێکبدە پاشان بەسادەترین شێوە بنووسە.

11 $2x^3(5x^4 - 3x + x^2 - 6 - x^3)$

12 $(x + 4)(x^3 - 7)(x + 1)$

ئەم ڕادەدارانە شیتەڵبکە

13 $x^3 + 4x^2 - 5x$

14 $x^3 - 3x^2 - 10x$

15 $x^3 - 125$

16 $27x^3 + 1$

لە جیاتیدانان بەکاردهێنە تاکو بڕیاربدەیت ئایا ڕادەداری یەکەم دابەش دەبێت بەسەر دووەم یان نا؟

17 $(x^3 - 7x^2 + 4x + 12)$ ؛ $(x - 2)$

18 $(x^3 - 5x^2 - 11x + 12)$ ؛ $(x + 2)$

دابەشبکە

19 $(x^3 + 6x^2 - x - 30)$ ؛ $(x - 2)$

20 $(x^3 - 2x^2 - 11x + 12) \div (x^2 - x - 12)$

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە وهەموو ڕەگەکانی دیاریبکە.

21 $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

22 $x^4 - 10x^2 + 24 = 0$

23 $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

24 $x^4 - 13x^2 + 12 = 0$

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە، ئەگەر زانیت ژمارە پێدراوەکە یەکێك لە ڕەگەکانییەتی.

25 $x^3 + 7x^2 + 16x + 12 = 0$ ؛ -3

26 $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = 0$ ؛ -3

27 $x^3 - 11x^2 + 38x - 40 = 0$ ؛ 4

28 $x^3 - 6x^2 - x + 6 = 0$ ؛ 6

29 هاوکێشەی $x^3 - x^2 - 6x + 6 = 0$ شیکاربکە.

پلەی ئەم ڕادەدارانە دیاریبکە

30 $3x^3 + 11x^2 - 2x + 1$

31 $8x^5 - 6x^2 + 10x^3$

32 $-x^2 + 8x - 5x^4 - 3$

33 $-2x^2 - x^3 + 7x^4$



تاقیکردنەوەی بەش

بەهای ئەم ڕادەدارانە هەژماربکە کاتێك x بەهای2ـ و 3 وەربگرێت.

1 x^3-2x^2+5

2 x^4-x^2+3x-4

3 $5x^2-3x+1$

4 $7x^3+x^2-2$

ئەم ڕادەدارانە کۆبکەرەوە یان لە یەکیاندەربکە.پلە وژمارەی ڕادەکانی دیاریبکە پاش ئەوەی بە شێوەی گشتی بنووسە.

5 $(5x^3-3x^2+x-7)+(3x^2-x-6)$

6 $(2x^5+9x^3-7x+4)-(9x^3+3x^2+4)$

7 **پارە پێدان:** لە یەکێ لە وولاتەکان حکومەت سندوقێکی تایبەتی دانا بۆ هاندانی کرێکارەکانی. بە کۆکردنەوەی بڕی پارەمەتی 5000 دینار لەسەرەتای هەر ساڵێك تاوەکو لە پیریدا سوودی لێوەربگرن، حکومەتیش 7%ی کۆی پارەی دانراوی هەرکرێکارێك بدات، سەرجەمی پارەی دانراوی کرێکارێك چەندە؟ دوای دانانی قیستی پێنجەم.

هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە بکێشە. گەورەترین وبچووکترین بەها بۆ نزیکترین دەیی بدۆزەرەوە. وناوچەی ڕوو لە زیادبوون ورووو لەکەمبوونیشیان بۆ دیاریبکە.

8 $f(x)=2-2x-x^2$

9 $f(x)=x^3+3x^2+4$

10 $f(x)=x^4-3x^2-4$

11 $f(x)=5-3x^2-x^3$

ئەم ڕادەدارانە شیتەڵبکە.

12 $5x^4-180x^2$

13 $4x^3-5x^2-8x+10$

14 $2x^3+128$

15 $x^4-7x^3+12x^2$

بەبەکارهێنانی دابەشکردنی ئەقلیدی ئەمانە دابەشبکە.

16 $(2x^4-7x^3-15x^2+8x+12)$بەسەر $(2x+3)$.

17 (x^3+3x^2-2x-6) بەسەر (x^2-2) .

بەبەکارهێنانی دابەشکردنی بژمێری ئەمانە دابەشبکە.

18 $(-x^3+6x^2-11x+6)$بەسەر$(x-3)$.

19 (x^3+6x^2-27)بەسەر$(x+3)$.

20 **پیشە سازی** نەخشەی $V(x)=x(14-2x)(32-2x)$ قەبارەی تەختەی لاکێشەتەریب دەنوێنێت. ڕادداری قەبارەکە بە شێوەی گشتی بنووسە پاشان قەبارەکەی هەژمێر بکە کاتێك $x=3$

ڕەگەکانی ئەم هاوکێشانە بدۆزەوە.

21 $-2x^3+7x^2+3x=0$

22 $x^4+2x^3-7x^2-14x=0$

23 $x^4-6x^2+8=0$

24 $x^4+2x^3-7x^2-14x=0$

25 **وزە:** سایلۆی غازی شل بە شێوەی لولەکێکی بازنەیی وەستاوە کە هەریەکێ لە سەرەکانی بە نیوە گۆیەك داپۆشراوە.ئەگەر نەخشەی $V(r)=15\pi r^2+\frac{4}{3}\pi r^3$ قەبارەی سایلۆیەك بێت بەمەتر سێجا کە r نیوەتیرەی بنکەکەی بێت، بەهای نزیکەیی قەبارەی سایلۆکە هەژمار بکە کاتێك نیوەتیرەی بنکەکەی $0.5m$ بێت.

ئەم نەخشە ڕادەدارانە بنووسە کە پاسادانی ئەم مەرجانە دەکەن.

26 پلەکەی = 2 ، $f(0)=3$ سفرەکانی 1 و$\frac{3}{7}$

27 پلەکەی = 3 ، $f(0)=-18$ سفرەکانی 3 و3− و 1−

28 پلەکەی = 3 ، $f(0)=30$ سفرەکانی 3− و 1− و و 2 .

4

تاقیکردنەوەی کەڵکەبوو

1 کام جووتی ڕێکخراو دەبێتە کۆمەڵە شیکاری هەردوو لاسەنگەی $y \ge -x$ ∧ $y\ge 3x+2$ ؟

أ $(1,-5)$ ب $(0,5)$

ج أ و ب پێکەوە د نە أ و نە ب

2 لاری ڕاستەهێڵی $3x+4y=2$ بریتییە لە

أ 3 ب $\frac{3}{2}$

ج $-\frac{3}{4}$ د 4

3 هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی بە خاڵی $(1,-3)$ دا دەڕوات ئەستوونە لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y=2x-2$ کامەیە؟

أ $2y=-x+5$ ب $2y=-x-5$

ج $y=-\frac{1}{2}x+6$ د $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

4 کام لەمانە شیتەڵکردنی ڕادەداری x^2-5x+6 دەنوێنێت؟

أ $(x-2)(x-3)$ ب $(x+2)(x-3)$

ج $(x+1)(x+6)$ د $(x-1)(x-6)$

5 سەری کام لەم نەخشانە بەهای گەورەترین دەنوێنێت.

أ $y=3x^2+5x$

ب $y=7x+5x-3x^2$

ج $y=3+5x+\frac{1}{3}x^2$

د $y=\frac{1}{3}x^2$

6 ژمارەی کۆمەڵە شیکاری سستەمی هاوکێشە سنووردارەکان دەکاتە.

أ سفر ب 1

ج I بە لایەنی کەمەوە د ژمارەیەکی نا کۆتایی

7 بەهای $|-2.5|-|3.2|$ ؟ هەژمێر بکە.

8 یەکتربڕینی ڕاستەهێڵی $x-5y=15$ لەگەڵ تەوەری صادی بریتییە لە

أ 15 ب -1

ج 3 د -3

9 کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەی $4x+2<2x+1$ بریتییە لە

أ $x\ge 1$ ب $x>2$

ج $x<\frac{1}{3}$ د $x<-\frac{1}{2}$

10 کام لەمانە کۆمەڵەی شیکارە بۆ لاسەنگەی $|x|\le 5$ ؟

أ $-5\le x\le 5$ ب $2\le x\le -2$

ج $5\le x\le -5$ د $-3\le x\le 3$

11 کۆمەڵەی شیکاری سیستمی هێڵی $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ بریتییە لە

أ $(2,3)$ ب $(2,1)$

ج $(-3,2)$ د $(0,1)$

12 ڕادەداری $(x+1)(x+2)(x-4)$ بە شێوەی گشتی بنووسە.

13 ئەم نەخشە دووجایە لەسەر شێوەی بنەڕەتی بنووسە $f(x)=2x^2-8x+9$.

14 کۆبکەوە $(2x^3+3x^2+1)+(5x^2-2x+2)$.

15 لێدەربکە $(5x^3+4x^2-x)-(x^2+2x-1)$.

ئەم بڕە دووجایانە شیتەڵبکە(ئەگەر توانرا)

16 $-3y^2-5y$

17 $x^2-5x-36$

18 $24x^2+5x-36$

19 $36x^2-46x-12$

20 ئەم هاوکێشە $\frac{2x}{3}=\frac{x+2}{2}$ شیکاربکە.

بەشی پێنجەم

بڕەکان و نەخشە ڕێژەییەکان

Expressions and Rational Function

1. گۆڕانی پێچەوانە ونەخشەی هەڵگەڕاوە.
2. نەخشە ڕێژەییەکان
3. لێکدان ودابەشکردنی بڕە ڕێژەییەکان.
4. کۆکردنەوە و لێدەرکردنی بڕە ڕێژەییەکان.
5. هاوکێشە ولاسەنگە ڕێژەییەکان.
6. نەخشەی ڕەگی دووجا

پرۆژەی بەشەکە

پێداچوونەوە

تاقیکردنەوەی بەش

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

بڕەکان و نەخشە ڕێژەییەکان

Expressions and Rational Function

بەشی

5

لەم بەشەدا بڕەکان و نەخشە ڕێژەییەکان ونەخشەی ڕەگی دووجا دەخوێنین. بڕە ڕێژەییەکان ئەو بڕانەن کە بەشێوەی ڕێژەی دوو ڕادەدار دەنووسرێت بەڵام نەخشە ڕێژەییەکان ئەو نەخشانەن کە بە هۆی بڕە ڕێژەییەکانەوە پێناسە دەکرێت. نەخشەی ڕێژەیی ونەخشەی ڕەگی دووجا لە زۆر بواری جیاوازدا بەکار دەهێنرێن. وەك فیزیا و کیمیا وئەندازە وئابوری وبازرگانی.

وانەکان

1. گۆڕانی پێچەوانە ونەخشەی هەڵگەڕاوە.
2. نەخشە ڕێژەییەکان
3. لێکدان ودابەشکردنی بڕە ڕێژەییەکان.
4. کۆکردنەوە ولێدەرکردنی بڕە ڕێژەییەکان.
5. هاوکێشە ولاسەنگە ڕێژەییەکان.
6. نەخشەی ڕەگی دووجا
پرۆژی بەش

قەبارەی هاوێنە بڕی ئەو گورزە تیشکە دیاریدەکات کە دەچێتە چاوەوە. لە کامێرای فۆتۆگرافییدا کونی هاوێنەکە بڕی گورزە تیشکەکە دیاریدەکات.





دەربارەی پرۆژەی بەش

زۆربەمان دەتوانین ناوەندەی کۆمەڵێك بەها بە ئاسانی هەژمێر بکەین.ناوەندەکان لە زۆر بوارەکانی ژیاندا بەکاردەهێنرێن وەك گۆڕینی دراوی بیانی لە بانکەکاندا، زیادکردنی کرێی کرێکار، بەکاربردنی سوتەمەنی بۆ ئۆتۆمبیل، ناوەندەکانی خێرایی. دەتوانین چەند جۆرێك ناوەندە هەژماربکەین. لەم بەشەدا دوو جۆریان وەردەگرین. ناوەندە ژمێرەیی و ناوەندە گونجاو. پێدراوەکان بەکاردەهێنین بۆ دیاریکردنی ئەو ناوەندەی کە شیاوترە لە هەر بارێکدا.

پاش تەواوبوونی ئەم بەشە توانای ئەمانەت دەبێ کە:

- ناوەندە ژمێرەیی وناوەندە گونجاو هەژمار بکەیت بۆ کۆمەڵە پێدراوێك.
- پەیوەندی نێوان ناوەندە ژمێرەیی وناوەندە گونجاو دیاریبکەیت.
- شیاوترین ناوەند دیاریبکەیت بۆ هەژمارکردنی کۆمەڵێك پێدراو.

وانەی 1

گۆڕانی پێچەوانە ونەخشەی هەڵگەڕاوە

Inverse Variation and Inverse Function



ئامانجەکان

- گۆڕانی پێچەوانە دەناسێت و نەگۆڕەکەی دیاریدەکات.
- هاوکێشەی گۆڕانی پێچەوانە دەنووسرێت.
- ئەو پرسیارانە شیکاردەکات کە پەیوەندیان بە ژیانی ڕۆژانەوە هەیە وگۆڕانێکی پێچەوانەیان تێدایە.

بۆچی

لەو پەیوەندیانەی کە دوو گۆڕاو پێکەوە دەبەستێتەوە، پەیوەندییەکی وەك ڕێژەی نێوان گۆڕاوی بەستراو وگۆڕاوی سەربەست نەگۆڕە، لەهەندێ پەیوەندیشدا لێکدانی دوو گۆڕاوەکە نەگۆڕە، یەکەم جۆری پەیوەندی نەخشەیەکی هێڵییە و پەیوەندییەکەی تر جۆرێکە لە نەخشەی ڕێژەیی نموونەش بۆ ئەوە پەیوەندی نێوان ژمارەی کرێکار وکاتی خایەنراو بۆ تەواوکردنی پرۆژەیەك.

زۆربەی جار لاوەکان خۆبەخشانە هەڵدەستن بە چاندنی دارو دەرخت بۆ سەوز کردنی ناوچە ڕووتەکان. ژمارەی بەشداربووەکان لە چاندنی دەرختەکاندا ڕۆڵێکی گرنگی دەبێت لە دیاریکردنی کاتی پێویست بۆ ئەنجامدانی ئەم پرۆژەیە. هەرچەند ژمارەکە زیادبکات، کاتی پێویست کەم دەبێتەوەو بە پێچەوانەوشەوە لەم چالاکیەدا ئەو جۆرە پەیوەندییەت بۆ ڕووندەبێتەوە.

چالاکی 1

دۆزینەوەی گۆڕانی پێچەوانە — Exploring Inverse Variation

تیمێکی دێدەوانی بەڵێنیدا درەخت بچێنێت بۆ سەوز کردنی ناوچەیەکی ڕووت وا دانرا هەر تیمێك لە سەعاتێکدا دە درەخت بروێنێت.

1. یەك تیم چەند کاتی پێویستە بۆ ڕواندنی هەموو درەختەکان.
2. کاتی پێویست چەند دەبێت ئەگەر 50 تیم بەکارەکە هەستن.
3. کاتی پێویست چەند دەبێت ئەگەر 100 تیم بەکارەکە هەستن.
4. نەخشەیەك بنووسە کاتی خایەنراو بە کاتژمێر T وژمارەی تیمەکان x بێت بۆ ڕواندنی هەموو درەختەکان.

خاڵی چاودێری ✓

گۆڕانی پێچەوانە Inverse Variation

دوو گۆڕاوی x ، y بە گۆڕانێکی پێچەوانە بەیەك دەبەسترێنەوە، ئەگەر ئەنجامی لێکدانیان بکاتە نەگۆڕێك، بەهاکانیان هەر چەندێك بێت. واتە $xy = h$ کاتێك h ژمارەیەکی ڕاستی بێت جگە لە سفر پێشی دەوترێت نەگۆڕی گۆڕانی پێچەوانە. **Constant of The Inverse Variation Relation**

بەپێی پەیوەندی $xy = h$ ، $h \neq 0$ نابێت هیچ یەکێك لە گۆڕاوەکان بەهای سفر وەربگرێت.

دەتوانین پەیوەندی پێچەوانەکەی پێشوو بەم شێوەیە بنوسین $y = \frac{h}{x}$.

چالاکی 2

دۆزینەوەی نەخشەی هەڵگەڕاوە Exploring The Inverse Function

1. ئەم خشتەیە بنووسەوە وتەواویبکە کاتێك $y = \frac{1}{x}$

x	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6
y									
xy									

شیکاری پرسیار

2. بە دوای شێوازێك بگەڕێ. بەهای y چی لێدێت کاتێك بەهای x زیاد بکات؟ ئەی y چی لێدێت کە x کەمبکات؟

3. هەنگاوی یەکەمی چالاکیەکە دووبارەبکەوە کە $y = \frac{2}{x}$ یان $y = \frac{4}{x}$ ، ئایا بڕوات وایە کە شێوازە دۆزراوەکەی پرسیارەکە بە شیاوی دەمێنێتەوە ئەگەر $y = \frac{3}{x}$ ؟ هەنگاوی یەکەم دووبارە بکەوە کاتێك $y = \frac{3}{x}$.

خاڵی چاودێری ✓

4. پەیوەندی $y = \frac{h}{x}$ چۆن دەگۆڕێت کاتێك $h > 0$ ، کاتێك بەهای x زیاد بکات وهەروەها کاتێك کەمبکات؟

5. ئەگەر $y = \frac{h}{x}$ ، $h > 0$ ئایا دەگونجێت بەهای x سفر بێت؟ ئەوە لێکبدەوە.

ئەگەر بەهای گۆڕاوی x وگۆڕاوی y بزانیت لەو پەیوەندیەی گۆڕانی پێچەوانە دەگەیەنێت ئەوا دەتوانیت بەهای نەگۆڕی h بدۆزیتەوە وهەروەها دەشتوانیت y وەك نەخشەیەك بە پێی x بەم شێوەیە بنووسیت $y = \frac{h}{x}$ ،لەو نموونانەی لە ژیانی ڕۆژانەوە وەردەگیرێن زۆربەی کات بەهای x و y موجەب دەبن.

نموونە 1

ئەگەر گۆڕاوی x و y پێچەوانە بگۆڕێن، $y = 13.5$ کاتێك $x = 4.5$

أ نەگۆڕی گۆڕانەکە بدۆزەوەو هاوکێشەی پەیوەندییەکەی نێوان x و y بنووسە.

ب بەهای y لەم بارانەدا بدۆزەوە کە $x = 0.5$ ، $x = 1$ ، $x = 1.5$ ، $x = 2$ ، $x = 2.5$.

شیکار

أ $h = xy = 4.5 \times 13.5 = 60.75$ دەتوانیت پەیوەندیەکە بەم شێوەیە بنووسیت $y = \frac{60.75}{x}$

ب بە بەکارهێنانی بژمێر بەهای y بە پێی بەهاکانی x ی دیاریکراو بدۆزەوە.

y	x
121.5	0.5
60.75	1
40.5	1.5
30.375	2
24.3	2.5

هەوڵبدە x و y دوو گۆڕاوی پێچەوانەن کاتێک $y = 120$ ئەوا $x = 6.5$ نەگۆڕی گۆڕانەکە و هاوکێشەی پەیوەندی نێوان x و y بنووسە پاشان بەهای y هەژمێربکە کاتێک x ئەم بەهایانە وەردەگرێت

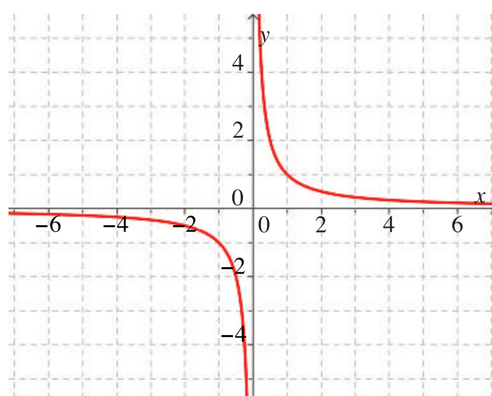
$x = 14 \quad x = 12.5 \quad x = 8 \quad x = 4.5 \quad x = 1.5$

نەخشەی هەڵگەڕاوە Inverse Function

کەمێک لەمەوپیش دیتت کە هاوکێشەی $y = \frac{h}{x}$ کاتێک $h \neq 0$ پەیوەندییەکی پێچەوانە دەنوێنێت لە نێوان دوو گۆڕاوی x و y ئەم پەیوەندییەش بە نەخشەی y بە پێی x دەناسرێت. سادەترین جۆری ئەم نەخشەیەش ئەوەیە کاتێک نەگۆڕەکە 1 بێت واتە هاوکێشەکە بەم چەشنە بێت $f(x) = \frac{1}{x}$

نەخشەی هەڵگەڕاوە Inverse Function

نەخشەی هەڵگەڕاوە ئەو نەخشەیە کە بەم هاوکێشەیە دەردەبڕێت $f(x) = \frac{1}{x}$

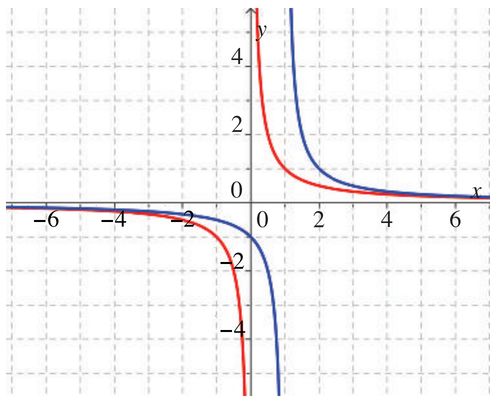


شێوەی بەرامبەر هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشەیە دەنوێنێت ئەگەر بەوردی سەرنجی هێڵکارییەکە بدەیت، تێبینی ئەم خاڵانە دەکەیت :

1. دەتوانیت بەهای y هەژمار بکەین بە پێی x بۆ هەموو بەهاکانی x جگە لە سفر. مانای ئەوەیە بواری نەخشەکە هەموو ژمارە ڕاستیەکانە جگە لە سفر.
2. تا بەهای x زیاد بکات بەهای y کەم دەکات ئەمەش بەوە دەردەبڕین و دەڵێین نەخشەکە ڕوولەکەم بوونە.
3. کاتێک x موجەب بێت وبەهاکەی زیادبکات، بەهای y بە موجەبی دەمێنێتەوە ونزیک دەبێتەوە لە سفر. بەم شێوەیەش دەریدەبڕین نزیکدەبێتەوە لە سفر لەلای موجەب کاتێک x نزیک دەبێتەوە لە $+\infty$
4. کاتێک x سالب بێت وبەهاکەی کەمبکات، بەهای y بە سالبی دەمێنێتەوە ونزیک دەبێتەوە لە سفر .بەم شێوەیەش دەریدەبڕین. y نزیک دەبێتەوە لە سفر لەلای سالب کاتێک x نزیکدەبێتەوە لە $-\infty$.
5. y نزیکدەبێتەوە لە سفر کاتێک بەهای ڕووتی x وردە وردە زیاد دەکات. لێرەشدا دەوترێت ڕاستە هێڵی $y = 0$ واتە تەوەری x دەرکەناری ئاسۆیی هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشە هەڵگەڕاوەکەیە.
6. هەر چەندە بەها سالبەکانی گۆڕاوی x زیاد بکات، بەهاکانی y بە سالبی دەمێنێتەوە و کەمدەکات لێرەدا دەوترێت y نزیک دەبێتەوە لە $-\infty$ کاتێک x نزیک دەبێتەوە لە سفر لە لای چەپەوە.
7. هەر چەندە بەها موجەبەکانی گۆڕاوی x کەمبکات، بەهاکانی y بە موجەبی دەمێنێتەوە وزیاد دەکات. لێرەدا دەوترێت y نزیک دەبێتەوە لە $+\infty$ کاتێک x نزیک دەبێتەوە لە سفر لەلای ڕاستەوە.
8. بەهای ڕووتی y وردە وردە زیاد دەکات کاتێک بەهای ڕووتی x وردە وردە کەم بکات. لێرەشدا دەوترێت ڕاستە هێڵی $x = 0$ واتە تەوەرەی y دەرکەناری شاوڵی هێڵی ڕوونکردنەوەیی دەرکەناری نەخشە هەڵگەڕاوەکەیە.

نموونە 2

لە هەمان ڕووتەختی پۆتانەکاندا هەر دوو هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشە هەڵگەڕاوەی و نەخشەی $f(x)=\frac{1}{x-1}$ بکێشە، ئەو جێگۆڕکێ ئەندازەییە چییە کە هێڵی ڕوونکردنەوەیی یەکەم دەگۆڕێت بۆ هێڵی ڕوونکردنەوەیی دووەم.



شیکار لە شێوەی بەرامبەردا دەردەکەوێت کە گواستنەوە لە هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی هەڵگەڕاوە بۆ هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی دووەم بەکشانێکی ئاسۆیی بەرەو لای ڕاست بە دووری یەك یەکە دەبێت. تێبینی ئەوە بکە $x=1$ دەرکەناری ستوونی هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی دووەمە، کەوێنەی ڕاکێشراوی دەرکەناری ستوونی نەخشە هەڵگەڕاوەکەیە بەراکێشانی ئاسۆیی.

هەوڵبدە لە ڕووتەختی پۆتانەکاندا هەردوو هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی هەڵگەڕاوە و نەخشەی $f(x)=\frac{1}{x+1}$ بکێشە، ئەو جێگۆڕکێ ئەندازەییانە کە هێڵی ڕوونکردنەوەیی یەکەم دەگۆڕێت بۆ هێڵی ڕوونکردنەوەیی دووەم چییە؟

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1 هاوکێشەیەك بنووسە هەردوو گۆڕاوی x و y بە پەیوەندییەکی گۆڕانی پێچەوانە بەیەکەوە ببەستێ کە نەگۆڕەکەی h بێت. هاوکێشەیەکی تر بنووسە کە ئەوە دەرببڕێت.

2 مەبەست چییە کە دەوترێت پەیوەندی نێوان خێرایی وکات گۆڕانێکی پێچەوانەیە. بە نموونە وەلامەکەت ڕوونبکەوە.

3 x و y دوو گۆڕاوی پێچەوانەن $y=3$ کاتێك $x=8$ چۆن بەهای y دەدۆزێتەوە کاتێك $x=2$ ؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

x و y دوو گۆڕاوی پێچەوانەن. هاوکێشەیەك بنووسە ئەو پەیوەندییە بنوێنێت.

4 $y=12$ کاتێ $x=60$ **5** $y=3$ کاتێ $x=4$

ئەم خشتانەی خوارەوە بەهای گۆڕاوی x وگۆڕاوی y ی بەرامبەری دیاریدەکات ئایا دوو گۆڕاوەکە پێچەوانە دەگۆڕێن؟ هۆی وەلامەکەت ڕوونبکەوە. ئەو هاوکێشەیە بنووسە کە گۆڕانە پێچەوانەکە دەنوێنێت(ئەگەر هەبێت).

6

x	2	3	4
y	12	8	6

7

x	4	15	20	60
y	30	8	6	2

8

x	2	3	4	5
y	10	9	8	7

9

x	5	15	25	75
y	45	15	9	3

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

کام لە هاوکێشانە گۆڕانی پێچەوانەیە لە نێوان دوو گۆڕاوەکەدا.

10 $xy = 400$ **11** $y = \frac{-28}{x}$ **12** $y = 10 - x$ **13** $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$

14 $x = 10y$ **15** $\frac{x}{5} = \frac{3}{y}$ **16** $x = y$ **17** $y = \frac{42}{x}$

لە پرسیارەکانی 18 تا 23، پەیوەندی نێوان x و y پەیوەندییەکی پێچەوانەیە.

18 $y = 8$ کاتێك $x = 6$ بەهای y چەندە ئەگەر $x = 12$

19 $y = 9$ کاتێك $x = 12$ بەهای y چەندە ئەگەر $x = 36$

20 $y = 3$ کاتێك $x = 32$ بەهای x چەندە ئەگەر $y = 4$

21 $y = 3$ کاتێك $x = -8$ بەهای x چەندە ئەگەر $y = -4$

22 $y = \frac{3}{5}$ کاتێك $x = -60$ بەهای y چەندە ئەگەر $x = 2$

23 $y = \frac{3}{4}$ کاتێك $x = 12$ بەهای y چەندە ئەگەر $x = 27$

بەستنەوە

24 **ئەندازە** سێگۆشەیەك ڕووبەرەکەی نەگۆڕە. ئەو پەیوەندییە کامەیە کە بنکە وبەرزی بەیەکەوە دەبەستێت؟ئەگەر بەرزییەکەی $36cm^2$ بێت کاتێك بنکەکەی 22cm بێت. درێژی بنکەکەی چەندە کاتێك بەرزییەکەی ببێتە 24cm ؟



25 **ئەندازە:** لاکێشەیەك ڕووبەرەکەی 36cm بێت. درێژی لاکێشەیەك چەندە کە هەمان ڕووبەری هەبێت ۆپانییەکەی 3cm بێت؟ ئەگەر واتادا ڕووبەری لاکێشەکە نەگۆڕێت، جۆری پەیوەندی نێوان درێژی وپانی دیارییکە.

26 **میکانیك** پەیوەندی نێوان خێرایی خولانەوەی پەپکێکی دداناوی و ژمارەی ددانەکانی گۆڕانێکی پێچەوانەیە. خێرایی پەپکێك 20 ددانی هەبێت چەندە؟ ئەگەر بزانیت خێرایی خولانەوەی پەپکێکی 16 ددانی 500 خول بێت لە یەك خولەکدا.

گەشت تێکرای گۆڕانی خێرایی هۆیەکی گواستنەوە وکاتی خایەنراو بۆ بڕینی ماوەیەکی دیاری کراو پەیوەندیەکی پێچەوانەیە

27 ئامانج ماوەیەکی دیاریکراوی بە 6 کاتژمێر بە تێکرای $80Km$ لە کاتژمێرێکدا بڕی کاتی پێویست چەندە بۆ بڕینی هەمان ماوە ئەگەر خێراییەکەی $90Km/h$ بوایە.

28 فرۆکەیەك پێویستی بە 2.7 کاتژمێر هەیە بۆ بڕینی ماوەی نێوان دووشار بە تێکرای 1 020 km/h . فرۆکەکە چەند کاتی پێویستە بۆ بڕینی هەمان دووری، کاتێك تێکرای خێرایەکەی 810 km/h بێت.

29 **فیزیا** ئەگەر درێژی شەپۆلێکی ڕادیۆ لەرەلەرەکەی پێچەوانە بگۆڕێت، درێژی شەپۆلێك چەندە ئەگەر لەرەلەرەکەی $2000Kh$ بێت.ئەگەر زانیت شەپۆلێك درێژییەکەی $200m$ بێت لەرەلەرەکەی $3000kh$.

30 **مۆسیقا** ئەگەر ژێی عودێك بلەرێتەوە ئەوا دەنگێك دروستدەکات. پەیوەندی نێوان ژمارەی لەرەلەرەکان ودرێژی ژێیەکەی پەیوەندییەکی پێچەوانەیە. درێژی ژێیەك چەندە؟ کاتێك ژێیەکە 370 جار بلەرێتەوە لە چرکەیەکدا. ئەگەر بزانیت درێژی ژێیەك $28cm$ بێت 518 لەرینەوەی هەیە لە چرکەیەکدا؟

ڕوانینێك بۆ دواوە

هەر یەکە لەم بڕانە بە توانی موجەب بنووسە.

31 x^{-1} 32 ab^{-3} 33 $\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}$

34 $y^{-2}b^{3}c^{-5}d$ 35 $\left[(x^{-3})^{-2}\right]^{-3}$

پۆتانی سەر و هاوکێشەی تەوەرەی ئەم بڕگە هاوتایانە بدۆزەوە.

36 $y=-3x^2+5$ 37 $y=x^2+2x-3$ 38 $y=-x^2-5x+6$

39 $y=x^2+2$ 40 $y=x^2+x+1$ 41 $y=2x^2-3x+2$

پلەی ئەم ڕادەدارانە دیاریبکە.

42 $3x^5-2x^4+x^2-1$ 43 $2-5x+7x^2-x^3$ 44 $-5x^3-x^4+1$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

45 خشتەیەك بۆ بەهایەکانی نەخشەی $f(x)=\frac{1}{x+2}$ دروستبکە بە پێدانی بەهای -3 تا -1 بە پلەدارکردنی کە هەر هەنگاوێکی 0.1 بێت.
خشتەکە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی بەهاکانی y کاتێك x نزیك دەبێتەوە لە -2 .

وانەی
2

نەخشە ڕێژەییەکان Rational Functions



ئامانجەکان

- نەخشە ڕێژەییەکان دەناسێت وبەهاکەی هەژمار دەکات.
- هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی ڕێژەیی دەکێشێت و بوارەکەی دیاریدەکات و هاوکێشەی دەرکەنارەکانی دیاریدەکات.

ئاسۆ لە تاقیگەیەکی کیمیاییدا کاردەکات. کارەکەی وا پێویست دەکات ڕێژەی سوێری گیراوەیەک ڕێک بخات. ئاسۆ دەتوانێت نەخشەیەکی ڕێژەیی بەکاربهێنێت بۆ نواندنی ڕێژەی سوێری گیراوەیەک.

نموونە 1

جێبەجێ کردنەکان: کیمیا

ئاسۆ گیراوەیەکی 65 ml لایە ڕێژەی سوێرییەکەی 10% یە و x ml ئاوی دلۆپێنراوی بۆ زیاد کرد بەمەش گیراوەیەکی نوێی دەستدەکەوێت.

أ) نەخشەی s بنووسە کە ڕێژەی سوێری گیراوە نوێیەکە بە پێی هێندی ئاوە دلۆپێنراوەکە بێت.

ب) ڕێژەی سوێری گیراوە نوێیەکە چەندە ، ئەگەر ئاسۆ *100 ml* زیادبکات؟

شیکار

أ) ئەندازەی خوێ لە گیراوە بنەڕەتیەکە

خوێ ← $\frac{6.5}{65}$ ← گیراوە $\qquad 10\%\times 65 = 6.5$

ئەندازەی خوێ لە گیراوە نوێیەکە:

زیادکردنی $x\ ml$ لە ئاوی دلۆپێنراو

خوێ ← $\frac{6.5}{65+x}$ ← گیراوە

نەخشەی ڕێژەی سوێری لە گیراوە نوێیەکە:

$$c(x)=\frac{6.5}{65+x}$$

ب) بۆ هەژمێر کردنی ڕێژەی سوێری پاش زیاد کردنی *100 ml* لە ئاوی دلۆپێنراو، هەژمێری بەهای نەخشەکە بکە کاتێک $x = 100$

$$c(100)=\frac{6.5}{65+100}\approx 0.039 \text{ یان } 3.9\%$$

بڕی ڕێژەیی **Rational Expression** بریتییە لە ڕێژەی نێوان دوو ڕادەدار. **نەخشەی ڕێژەیی Rational Function** بە پێی بڕی ڕێژەیی پێناسە دەکرێت.نەخشەی $c(x)=\frac{6.5}{65+x}$ لە نموونەی 1 دا نەخشەیەکی ڕێژەییە بە پێی بڕی ڕێژەیی $\frac{6.5}{65+x}$ پێناسە کراوە.

خاڵی چاودێری ✔ ئایا نەخشەی $f(x)=\frac{x^2+2}{|x|}$ نەخشەیەکی ڕێژەییە؟ ڕوونیبکەوە.

نەخشەی هەڵگەڕاوەی $f(x)=\frac{1}{x}$ سادەترین نەخشەی ڕێژەییەکانە. لەوانەی پێشوودا بینیت بەهای نەخشەکە هەژمار ناکرێت کاتێك $x=0$. بە شێوەیەکی گشتی بواری نەخشەی ڕێژەیی هەموو ژمارە ڕاستییەکانە جگە لەو ژمارانەی ژێرە دەکەن بە سفر، ئەو ژمارانەی ژێرە دەکەنە سفر پێیان دەوترێت ژمارە قەدەغەکراوەکان بۆ گۆڕاوی x

نموونە 2 بواری نەخشەی $f(x)=\frac{x^2-12x+12}{x^2+9x+20}$ دیاریبکە.

شیکار

ژمارە قەدەغەکراوەکان دیاریبکە، ئەویش بە دۆزینەوەی هەردوو ڕەگی هاوکێشەی $x^2+9x+20=0$

$$x^2+9x+20=0$$

$$(x+4)(x+5)=0$$

$$x=-5 \text{ یان } x=-4$$

کەواتە بواری نەخشەکە هەموو ژمارە ڕاستییەکانە جگە لە -4 و -5 .

هەوڵبدە بواری ئەم نەخشە $f(x)=\frac{3x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ دیاریبکە.

دەرکەنارە ستوونییەکان Vertical Asymptotes

بیرت بێ نەخشەی هەڵگەڕاوە دەرکەنارێکی ستوونی هەیە هاوکێشەکەی $x=0$ و دەرکەنارێکی ئاوسۆیی هەیە هاوکێشەکەی دەکاتە $y=0$ بە شێوەیەکی گشتی دەکرێت نەخشەی ڕێژەیی دەرکەناری ئاسۆیی وشاوڵی هەبێت. لەم چالاکیەدا ئەوەمان بۆ ڕووندەبێتەوە.

چالاکی

دۆزینەوەی دەرکەنارە ستوونییەکان Exploring Vertical Asymptotes

1. نەخشەی $y=\frac{1}{x-2}$ بەکاربهێنە

أ ئەم خشتەیە بنووسەوە، بە بەکارهێنانی بژمێر تەواویبکە.

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
y										

ب ئەم خشتەیە بنووسەوە، بە بەکارهێنانی بژمێرە تەواوییبکە.

x	3	2.9	2.8	2.7	2.6	2.5	2.4	2.3	2.2	2.1
y										

خاڵی چاودێری

2. y چی بەسەردێت کاتێك x نزیکبێتەوە لە 2 لە لای چەپ وردە وردە؟ ئەی چی بەسەردێت کاتێك x نزیکبێتەوە لە 2 لای ڕاست وردە وردە. پێشبینی بەهای y بەچەند دەکەیت ئەگەر $x=2$.

خاڵی چاودێری

3. ئەگەر $y=\frac{1}{x+3}$ بە بەکارهێنانی بژمێر بەهای y هەژمێربکە کاتێك نزیکبێتەوە لە 3- لە لای ڕاست پاشان ولای چەپ. چۆن پێشبینی بەهای y دەکەیت ئەگەر $x=-3$

بەو ژمارە ڕاستییانەی کەوا لێناگەرێت نەخشەی ڕێژەیی پێناسە کراوبێت دەوترێت ژمارە قەدەغەکراوەکان **Excluded Values** بۆ ئەو نەخشەیە.

بواری نەخشەی ڕێژەیی بریتییە لە هەموو ژمارە ڕاستییەکان جگە لە ژمارە قەدەغەکراوەکانی ئەو نەخشەیە.

خاڵی چاودێری

بەهای قەدەغەکراوی نەخشەی $y=\frac{x+3}{x^2-x-6}$ دیاریبکە.

دەکرێت نەخشەی ڕێژەیی دەرکەناری ستوونی لە ژمارەیەکی قەدەغەکراودا هەبێت. مەرجی هەبوونی ئەم دەرکەنارەش بریتییە لە:

دەرکەناری ستوونی Vertical Asymptotes

ئەگەر $x-a$ کۆڵکەیەك بێت لە کۆڵکەکانی ژێرەی نەخشەیەکی ڕێژەیی و کۆڵکەی سەرە نەبێت ئەوا ڕاستەهێڵی $x=a$ دەرکەناری ستوونی نەخشەکەیە.

نموونە 3

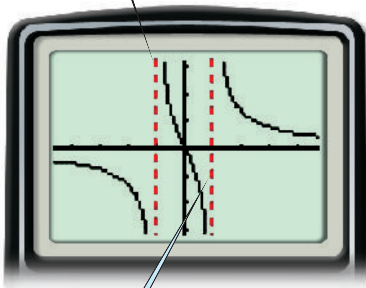
دەرکەنارە ستوونییەکانی نەخشەی $y=\frac{2x}{x^2-1}$ بدۆزەوە.

شیکار

ژێرە شیتەڵبکە $y=\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2x}{(x+1)(x-1)}$

دوو ژمارەی قەدەغەکراوی نەخشەکە بریتین لە -1 و 1

لەبەر ئەوەی هیچ کۆڵکەیەکی ژێرە کۆڵکەی سەرەش نییە بۆیە $x=1$ و $x=-1$ دوو دەرکەناری ستوونی نەخشەکەن.



ساغبکەوە بە بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی وێنەی نەخشەی $y=\frac{2x}{x^2-1}$ بکێشە. دڵنیا بکە کە هەردوو ڕاستەهێڵی $x=1$ و $x=-1$ دەرکەناری ستوونین.

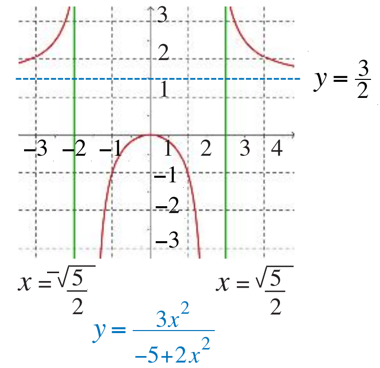
هەوڵبدە دەرکەنارە ستوونییەکانی نەخشەی $y=\frac{x}{x^2+5x+6}$ بدۆزەوە.

خاڵی چاودێری

نەخشەیەکی ڕێژەیی بنووسە کە سەرەی 1 بێت و ڕاستەهێڵەکانی $x=2$ و $x=-2$ دەرکەنارە ستوونییەکانی بن.

Horizontal Asymptotes دەرکەنارە ئاسۆییەکان

بەسوود وەرگرتن لە هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=\frac{3x^2}{-5+2x^2}$ دەتوانین دەرکەنارە ئاسۆییەکانی نەخشە ڕێژەییەکە دیاری بکەین. لەوێنەکەوە دەردەکەوێت ڕاستە هێڵی $y=\frac{3}{2}$ دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکەیە، ئەم دوو خشتەیەی خوارەوە دەری دەخەن هەتا x دووربکەوێتەوە لە سفر بە ئاراستەی $+\infty$ یان $-\infty$ بەهای y لە $\frac{3}{2}$ نزیک دەبێتەوە.



x	y
10	1.5385
20	1.5094
30	1.5042
40	1.5023
50	1.5015
60	1.501
70	1.5008

بەهای x لەسفر دوور دەکەوێتەوە بە ئاراستەی $+\infty$

بەهای y لە $\frac{3}{2}$ نزیک دەبێتەوە

x	y
−10	1.5385
−20	1.5094
−30	1.5042
−40	1.5023
−50	1.5015
−60	1.501
−70	1.5008

بەهای x لەسفر دوور دەکەوێتەوە بە ئاراستەی $-\infty$

بەهای y نزیک دەبێتەوە $\frac{3}{2}$

ئەگەر پلەی سەرەی نەخشەکە وپلەی ژێرەی نەخشەکە یەکسان بن ئەوا دەتوانیت هاوکۆڵکەی ڕادە سەرەکییەکان هەردووکیان بەکاربهێنێت (بۆ سەرە 3 و بۆ ژێرە 2) بۆ نووسینی هاوکێشەی دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکە $y=\frac{3}{2}$.

دەرکەنارە ئاسۆییەکان Horizontal Asymptotes

- ئەگەر پلەی سەرە لە پلەی ژێرە بچووکتر بوو ئەوا ڕاستە هێڵی $y=0$ دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکەیە.
- ئەگەر پلەی سەرە لە پلەی ژێرە گەورەتر بوو ئەوا نەخشەکە دەرکەناری ئاسۆیی نییە.
- ئەگەر پلەی سەرە وژێرە یەکسانبوون و m هاوکۆڵکەی ڕادەی سەرەکی سەرە و n هاوکۆڵکەی سەرەکی ژێرە بێت، ئەوا ڕاستە هێڵی $y=\frac{m}{n}$ دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکەیە.

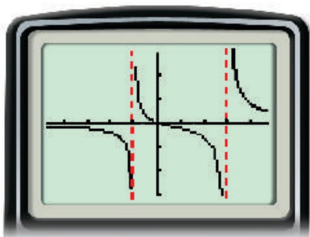
نموونە 4 دەرکەنارە ئاسۆیی وستوونییەکانی نەخشەی $y=\frac{x}{x^2-2x-3}$ بدۆزەوە.

شیکار

1. بۆ دۆزینەوەی دەرکەناری ستوونی ژێرە شیتەڵبکە.

$$y=\frac{x}{x^2-2x-3}=\frac{2x}{(x-3)(x+1)}$$

لەبەر ئەوەی هەردوو کۆڵکەکانی ژێرە نابنە کۆڵکەی سەرە کەواتە نەخشەکە دوو دەرکەناری ستوونی هەیە. کەبریتییە لە دوو ڕاستەهێڵی $x=3$ و $x=-1$.



2. لەبەر ئەوەی پلەی سەرە بچووکترە لە پلەی ژێرە، ئەوا نەخشەکە تەنها یەك دەرکەناری ئاسۆیی هەیە کە بریتیە لە ڕاستەهێڵی $y=0$.

ساغبکەرەوە

وێنەی هێڵی ڕوونکردنەوەیی $y=\frac{x}{x^2-2x-3}$ بکێشە و دەرکەنارەکان دیاربکە.

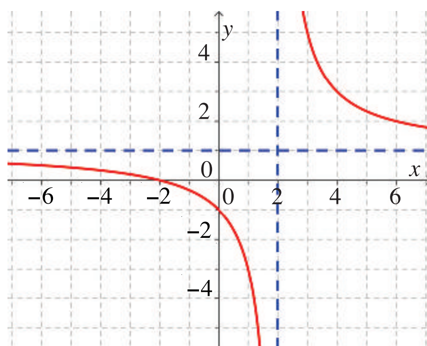
بەکارهێنانی دەرکەنارەکان بۆکێشانی هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی
Using Asymptotes to Graph

لە نموونەی 5 دا. ئەوە فێردەبن چۆن دەرکەنارەکان بەکاربێنن بۆ کێشانی هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی ڕێژەیی.

نموونە 5 **هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=\frac{x+2}{x-2}$ بکێشە ودەرکەنارە ئاسۆیی وستوونییەکانی لەسەر دیاریبکە.**

شیکار هاوکێشە دەرکەنارەکان بنووسە پاشان و وێنەی بکێشە، یەک دەرکەناری ستوونی هەیە هاوکێشەکەی $x=2$ ویەک دەرکەناری ئاسۆیی هەیە هاوکێشەکەی $y=1$. خشتەیەک دروستبکە بۆ دیارکردنی ئەو خاڵانەی دەکەونە سەر هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە.

x	-1	0	1	3	4	5
y	$-\frac{1}{3}$	-1	-3	5	3	$2\frac{1}{3}$



پاشان خاڵەکان لەسەر ڕووتەختی پۆتانەکان دیاریبکەو وێنەکە بکێشە بە گەیاندنی خاڵەکان لەهەر لایەکیدا بە چەماوەیەکی گونجاو.

ڕاهێنان

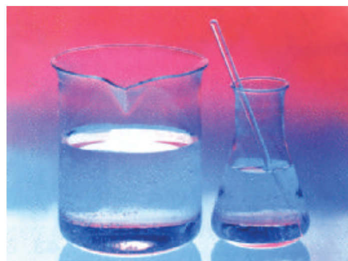
بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 چۆن ژمارە قەدەغەکراوەکانی نەخشەیەکی ڕێژەیی دیاریدەکەیت.

2 چۆن دەزانیت کۆڵکەی $x-a$ بۆ ژێرەی نەخشەیەکی ڕێژەیی دەرکەناری ستوونی دیاریدەکات یان نا.

3 چۆن دەرکەنارەکان بەکاردەهێنێت بۆ کێشانی هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=\frac{x-5}{x-3}$

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو



4 **کیمیا** بەگەڕانەوە بۆ نموونەی یەکەمی سەرەتای وانەکە لەسەر ڕێژەی سوێری. هاوکێشەی ئەو نەخشەیە بنووسە کە ڕێژەی سوێری گیراوە نوێیەکە دیاریدەکات. کاتێک ئاسۆ x ml ئاوی دلۆپێنراو بۆ 90 ml لە گیراوەکە زیاد بکات.بۆ ئەوەی ڕێژەی سوێریەکەی ببێتە 15% ڕێژەی سوێری گیراوە نوێیەکە دەبێتە چەند؟ ئەگەر ئاسۆ 150ml ئاوی دلۆپێنراو بۆ گیراوە بنەڕەتییەکە زیادبکات.

5 بواری نەخشەی $f(x)=\frac{2x^2-5}{x^2-7x+12}$ دیاریبکە.

دەرکەنارەکانی ئەم نەخشانە دیاریبکە.

6 $f(x)=\frac{3x-1}{4x^2-9}$

7 $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2-9}$

8 $f(x)=\frac{(x-3)^2}{x^2-5x+6}$

9 هێڵکاری ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$ بکێشە و هەموو دەرکەنارەکانی دیاریبکە.

ڕاهێنان وچیبەجێکردن

ئەم نەخشانە ڕێژەیین یان نا؟ئەگەر ڕێژەیین بوارەکەی دیاریکە،ئەگەر نا هۆیەکەی ڕوونبکەوە.

10 $f(x)=\frac{x}{2x-7}$

11 $f(x)=\frac{x+2}{2x}$

12 $f(x)=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}$

13 $f(x)=\frac{x}{(2x-7)(x+3)}$

14 $f(x)=\frac{5^x}{x^5}$

15 $f(x)=\frac{|x^2-4|}{|x+2|}$

دەرکەنارەکانی ئەم نەخشە ڕێژەییانە دیاریکە.

16 $f(x)=\frac{3x+5}{x-2}$

17 $f(x)=\frac{x+2}{2x^2}$

18 $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$

19 $f(x)=\frac{(x+2)^2}{x^2+5x+6}$

20 $f(x)=\frac{x^2-16}{4-5x+x^2}$

21 $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}$

بوار و دەرکەنارەکانی ئەم نەخشانە دیاریکە.

22 $f(x)=\frac{2x-2}{2x+2}$

23 $f(x)=\frac{2x}{2x(x-5)}$

24 $f(x)=\frac{(3x-1)(x+2)}{x+2}$

25 $f(x)=\frac{x+1}{x^2+4x-21}$

26 $f(x)=\frac{3x-1}{9x^2-36}$

27 $f(x)=\frac{7x+8}{x^2-10x+25}$

28 $f(x)=\frac{5x^2+1}{5x^2+3}$

29 $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$

30 $f(x)=\frac{x(x^2-4)}{x^2-7x+6}$

31 $f(x)=\frac{2x+1}{x^3-27}$

ئەو نەخشە ڕێژەییانە بنووسە کە ئەم دەرکەنارانەیان هەیە.

32 $x=2$ و $y=3$

33 $x=-2$ و $y=0$

34 $x=1$ و $x=-1$ و $y=2$

35 $x=2$ و $x=-3$ و $y=-1$

بەرەنگاربونەوە

36 بەهای b لەنەخشەی $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+b}$ بدۆزەوە کاتێک نەخشەکە تەنها یەک دەرکەناری هەبێت، کاتێک نەخشەکە هیچ دەرکەنارێکی نەبێت بەهای b دیاریکە؟

گرێدان

37 ئەندازە لە لاکێشەی بەرامبەردا.

$2x+1$

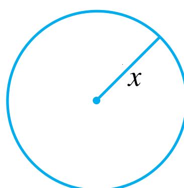


$x+1$

أ نەخشەی ڕێژەیی کە ڕێژەی چێوە بۆ ڕووبەر دەنوێنێت بنووسە.

ب بەهاکانی x چەند دەبن کە بۆ ئەوەی هەژمێرکردنی چێوە و ڕووبەر لەتوانادا بێت. بواری ئەو نەخشەیەی نوسیوتە دیاریکە.

38 ئەندازە لە بازنەی بەرامبەردا.



أ نەخشەی ڕێژەیی کە ڕێژەی چێوە بۆ ڕووبەر دەنوێنێت بنووسە.

ب بەهاکانی x چەند دەبن بۆ ئەوەی هەژمێرکردنی چیوە و ڕووبەر لە توانادا بێت. بواری ئەو نەخشەی نوسیوتە دیاریکە.

39 **کیمیا** تارا $x\ ml$ ئاوی دڵۆپێنراوی بۆ $72ml$ لە گیراوەیەك کە ڕێژەی سوێرییەکەی 8% بێت زیادکرد.

أ نەخشەیەکی ڕێژەیی بنووسە کە ڕێژەیی سوێری گیراوە نوێیەکە دەنوێنێت.

ب ڕێژەی سوێری گیراوە نوێیەکە چەندە، ئەگەر زانیت تارا $720ml$ ئاوی دڵۆپێنراوی بۆ گیراوەکە زیادکرد.



40 **ئابووری** ژوان دوکانێکی فرۆشتنی گوڵی هەیە خەرجی نەگۆڕی دوکانەکەی حەفتانە 950 هەزار دینارە، خەرجی چەپکە گوڵێك 42.45 هەزار دینارە.

أ نەخشەی g بنووسە کە خەرجی گشتی بنوێنێت لەماوەی حەفتەیەکدا، ئەگەر دوکانەکە x چەپکە گوڵی فرۆشتبێت.

ب نەخشەیەك بنووسە کە خەرجی گشتی هەر چەپکە گوڵێك لەماوەی حەفتەیەکدا بنوێنێت.

41 **فیزیا** هەرچەند مرۆڤ بەرەو بۆشایی ئاسمان بەرزبێتەوە کێشەکەی کەمدەکات. زاناکان پەیوەندییەکیان دۆزیوەتەوە لە نێوان کێشی مرۆڤ W لەسەر زەوی و کێشەکەی W_0 لە بۆشایدا کاتێك لە بەرزی $h\ Km$ بێت بریتییە لە $W(h)=W_0\left(\frac{6400}{6400+h}\right)^2$.

أ نەخشەی W نەخشەیەکی ڕێژەییە، ئەمە ڕوونبکەوە.

ب کێشی مرۆڤێك لەسەر ڕووی زەوی 75 Kg خشتەیەك دروستبکە کێشەکەی بنوێنێت لەبەرزی $10Km$ و $20Km$ و $100Km$ دا.

ج لەبەرزی چەند کیلۆمەتردا کێشی مرۆڤێك دەبێتە نیوەی کێشەکەی لەسەر زەوی بە نزیکەیی؟

ڕوانینێك بۆ دواوە

ئەمانە شیکاربکە.

42 $|5x-6|>2$

43 $|x+5|\geq 7$

44 $\left|\frac{3}{2}-\frac{5}{2}x\right|\leq\frac{7}{2}$

45 $\left|\frac{3}{2}-\frac{5}{2}x\right|\geq-\frac{7}{2}$

ئەم برانە بە شێوەی گشتی بڕی دووجای ax^2+bx+c بنووسە.

46 $-12x(3x-2)$

47 $(3x-1)(6x-7)$

48 $(4-5x)(x-9)$

49 $(x-5)(2x+3)$

50 $(3x-4)(3x+4)$

51 $-4(x-3)^2$

ئەم برانە شیتەڵبکە.

52 $3x^2-6x$

53 $1-25y^2$

54 $9x^2-49$

55 $x^2-5x-24$

56 $x^2+12x+36$

57 $x^2-16x+64$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

ئەمانە بە شێوەیەکی سادە بنووسە.

58 $\frac{9}{3}$

59 $\frac{x^2}{x}$

60 $\frac{x^2+4x+4}{x+2}$

وانەی 3

لێکدان و دابەشکردنی برە ڕێژەییەکان

Multiplying and Dividing Rational Expressions

بۆچی

شیکاری هەندێ پرسیار پێویستی بە لێك دان و دابەشکردنی برە ڕێژەییەکان هەیە. وەك تێچوون وداهاتی ئاهەنگێك بۆ کۆکردنەوەی پارەتی.



ئامانجەکان

- برە ڕێژەییەکان لێکدەدات و دابەشدەکات.
- برە ڕێژەییەکان سادەدەکاتەوە.

جێبەجێ کردن

کاری خێراخوازی

بەبۆنەی جەژنی نەورۆز، یەکێك لە ئامادەییەکان ئاهەنگێکی خێرخوازی ساز دەکات بۆ کۆکردنەوەی بڕێ پارە و خەرجکردنی بۆ کەم دەرامەتەکان. خوێندکارانی ڕێکخەری ئاهەنگەکە بڕیاریان دا کۆمەڵێك شاڵ ئامادە بکەن وبەئامادەبووانی بفرۆشن، دوای لێکۆڵینەوە لە داهاتی ئەو پارەیەی لە ئاهەنگەکەوە دەستیان دەکەوێت ئەم ڕێژەیان بەکارهێنا:

$$\frac{\text{نرخی فرۆشتنی یەك شاڵ}}{\text{تێچوونی ئامادەکردنی یەك شاڵ}}$$

خوێندکاران گەیشتنە ئەو ئەنجامەی کە تێچوونی بەرهەمی x شاڵ دەکاتە $0.8x+25$ بۆیە بڕیاریاندا نرخی هەر شاڵێك بە 3 هەزار دینار دابنێن. پێویستە چەند شاڵ بفرۆشن بۆ ئەوەی ڕێژەی نرخی یەك شاڵ بۆ تێچوونی ئامادەکردنی یەك شاڵ لە 1.5% کەمتر نەبێت.

کورتکردنەوەی برە ڕێژەییەکان Symplifying Rational Expressions

بۆ کورتکردنەوەی برە جەبرییەکان سەرە وژێرە دابەشی گەورەترین کۆلکەی هاوبەشی هەردووکیان دەکرێت. لەم بارەشدا دەوترێت برەکە بە سادەترین شێوەدایە.

نموونە 1 ئەم برە کورت بکەوە $\frac{x^2+5x-6}{x^2-36}$.

شیکار

$\frac{x^2+5x-6}{x^2-36}=\frac{(x+6)(x-1)}{(x-6)(x+6)}$ سەرەوژێر شیتەڵبکە.

$=\frac{(x+6)(x+1)}{(x-6)(x+6)}$ هەریەك لەسەرە و ژێرە دابەشی کۆلکەی هاوبەشبکە.

$=\frac{x-1}{x-6}$

تێبینی ئەوە بکە هەر دوو ژمارەی 6 و -6 دوو ژمارەی قەدەغەکراوی برە بنەڕەتیەکەیە

هەوڵبدە بری $\frac{b^2-49}{b^2-8b+7}$ بەسادەترین شێوە بنووسیت.

Multiplying Rational Expressions لێکدانی برە ڕێژەییەکان

لێکدانی برە ڕێژەییەکان لە لێکدانی ژمارە ڕێژەییەکان دەچێت.

لێکدانی ژمارە ڕێژەییەکان	لێکدانی برە ڕێژەییەکان
$\frac{15}{4}\times\frac{14}{9}=\frac{3\times5}{4}\times\frac{2\times7}{9}=\frac{35}{6}$	$\frac{15}{x^2}\times\frac{4x^4}{21}=\frac{3\times5}{x^2}\times\frac{4x^4}{3\times7}=\frac{20x^2}{7}$

نموونە 2 $\frac{3}{4x^2}\times\frac{4x^3}{21}\times\frac{14}{4x^5}$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

شیکار

$$\frac{3}{4x^2}\times\frac{4x^3}{21}\times\frac{14}{4x^5}=\frac{3\times4\times2\times7}{4\times3\times7\times2\times2}\times\frac{x^3}{x^7}=\frac{1}{2x^4}$$

هەوڵبدە بڕی $\frac{28}{4b^3}\times\frac{4b^5}{21}\times\frac{3}{49b^4}$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

بۆ لێکدانی دوو بڕی ڕێژەیی، ڕێساکانی لێکدانی کەرتەکان بەکاربێنە

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}\quad b\neq0\quad d\neq0$$

دەتوانیت ئەنجامی لێکدانەکە بە کورتکردنەوەی کۆڵکە هاوبەشەکانی سەرەوژێرە سادەبکەیت.

نموونە 3 $\frac{x+1}{x^2+2x-3}\times\frac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

شیکار

$$\frac{x+1}{x^2+2x-3}\times\frac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}=\frac{x+1}{(x+3)(x-1)}\times\frac{(x+3)(x-2)}{(x-3)(x+1)}$$

$$=\frac{x-2}{(x-1)(x-3)}=\frac{x-2}{x^2-4x+3}$$

هەوڵبدە بڕی $\frac{x^2-25}{x^2-5x+6}\times\frac{x^2-4}{x^2+2x-15}$ سادە بکە.

سەرنجێکی ڕەخنەگرانە زریان بڕی $\frac{2x+3}{5y+3}$ کورتکردەوە بە شێوەی $\frac{2x+3}{5y+3}=\frac{2x}{5y}$ ئایا ڕاستیکردووە؟ ڕوونیبکەوە.

Dividing Rational Expressions دابەشکردنی برە ڕێژەییەکان

دابەشکردنی برە ڕێژەییەکان لە دابەشکردنی ژمارەی ڕێژەییەکان دەچێت.

دابەشکردنی ژمارە ڕێژەییەکان	دابەشکردنی برە ڕێژەییەکان
$\frac{6}{8}\div\frac{12}{32}=\frac{6}{8}\times\frac{32}{12}=\frac{6}{8}\times\frac{32}{12}=\frac{4}{2}=2$	$\frac{6}{x^3}\div\frac{12}{x^5}=\frac{6}{x^3}\times\frac{x^5}{12}=\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}x^2$

بۆ دابەشکردنی بڕێکی جەبری بەسەر یەکێکی تر، بڕی یەکەم

لەهاوگەڵڕاوەی دووەمیان بدە $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}\quad b\neq0\quad c\neq0\quad d\neq0$

دەتوانیت ئەنجامی لێکدان کورتبکەیتەوە بە کورتکردنەوەی کۆڵکە هاوبەشەکان لە نێوان سەرەوژێرە.

نموونە 4

بڕی $\frac{x^2-3x-4}{x^2-4} \div \frac{x-4}{(x-2)^2}$ سادەبکە.

شیکار

$$\frac{x-4}{(x-2)^2} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2-4} = \frac{x-4}{(x-2)^2} \times \frac{x^2-4}{x^2-3x-4}$$

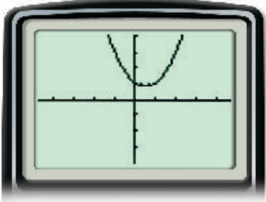
$$= \frac{x-4}{(x-2)(x-2)} \times \frac{(x-2)(x+2)}{(x+1)(x-4)}$$

$$= \frac{x+2}{(x-2)(x+1)} \text{ یان } \frac{x+2}{x^2-x-2}$$

هەوڵبدە بڕی $\frac{x^2-9}{x^2-8x+15} \div \frac{(x+3)^2}{(x-5)}$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

بیرکردنەوەی ڕەخنە گرانە ئارام بڕی $\frac{1}{x-5} \div \frac{x-5}{7}$ بەم شێوەیە کورت کردەوە. $\frac{1}{x-5} \div \frac{x-5}{7} = 1 \div 7 = 1 \times \frac{7}{1} = 7$
ئایا ئەوە ڕاستە؟ ئەو ڕوونبکەوە.

شیکاری پرسیارەکان دەتوانین هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی بەکار بێنین بۆ زانینی ئەوەی ڕادەرێك شیتەڵ دەبێت یان نا.
بۆ ئەوەی بزانین بڕێکی وەك x^2-x+1 شیتەڵ دەبێت یان نا هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی
نەخشەی $y=x^2-x+1$ بکێشە و دڵنیا بە لەوەی تەوەرەی سینی دەبڕێت یان نا.
لەبەر ئەوەی ئەم چەماوەیە تەوەرەی x نابڕێت واتا نەخشەکە
هیچ سفرێکی نییە لە ژمارە ڕاستییەکاندا بۆیە شیتەڵ نابێت.
لەوەشەوە دەردەکەوێت بڕی ڕێژەیی $\frac{x^2-x+1}{x^2} \times \frac{x-4}{x-1}$ سادەتر نابێتەوە.



Complex Rational Expressions — بڕە ڕێژەییەئاڵۆزەکان

بڕە ڕێژەییە ئاڵۆزەکان.ئەو بڕانەن کە لەسەرە یان ژێرە یان لەهەردووکیاندا بڕی ڕێژەیی هەبێت.

نموونە 5

بڕی $\frac{\frac{4a^2-1}{a^2-4}}{\frac{2a-1}{a+2}}$ بەسادەترین شێوە بنووسە.

شیکار

$$\frac{\frac{4a^2-1}{a^2-4}}{\frac{2a-1}{a+2}} = \frac{4a^2-1}{a^2-4} \div \frac{2a-1}{a+2}$$ سەرە دابەش ژێرە بکە.

$$= \frac{4a^2-1}{a^2-4} \times \frac{a+2}{2a-1}$$ یەکەم لە هەڵگەڕاوی دووەم بدە

$$= \frac{(2a-1)(2a+1)}{(a-2)(a+2)} \times \frac{a+2}{2a-1}$$ شیتەڵبکە

$$= \frac{(2a-1)(2a+1)(a+2)}{(a-2)(a+2)(2a-1)}$$ کۆڵکە هاوبەشەکان کورتبکەوە

$$= \frac{2a+1}{a-2}$$

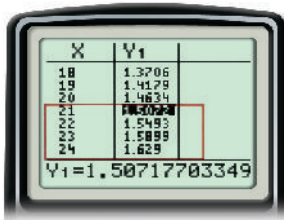
هەوڵبدە بڕی $\frac{\frac{(x+2)^2}{x-3}}{\frac{x^2-4}{(x-3)^2}}$ سادەبکە.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە بڕی $\frac{\frac{x+y}{x-y}}{\frac{y+x}{y-x}}$ سادە بکە بە بەکارهێنانی هەژمێری هزری.

نموونە 6 بەگەڕانەوە بۆ نموونەی سەرەتای وانەکە. خوێندکاران پێویستە چەند شاڵ بفرۆشن بۆ ئەوەی ڕێژەی نرخی یەك شاڵ بۆ نرخی تێچوونەکەی لە 1.5 کەمتر نەبێت؟

شیکار

$$\frac{\text{نرخی فرۆشتنی یەك شاڵ}}{\text{نرخی تێچوونی یەك شاڵ}} = \frac{3}{\frac{0.8x+25}{x}}$$



برە ئالۆزەکە سادە بکەوە $\frac{3}{\frac{0.8x+25}{x}} = 3\times\frac{x}{0.8x+25} = \frac{3x}{0.8x+25}$

نەخشەی $y=\frac{3x}{0.8x+25}$ لە بژمێری ڕوونکردنەوەییدا تۆماربکە.

لەخشتەکەوە دەردەکەوێت خوێندکاران پێویستە بە لایەنی کەمەوە 21 شاڵ بفرۆشن.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 لێکدانی برە ڕێژەییەکان ولێکدانی ژمارە ڕێژەییەکان لە چیدا لێکدەچن؟

2 دابەشکردنی برە ڕێژەییەکان ودابەشکردنی ژمارە ڕێژەییەکان لە چیدا لێکدەچن؟

3 چۆن ئەم برە ئالۆزە کورت دەکەیتەوە $\dfrac{\frac{x^2}{x^2-1}}{\frac{x}{x^2+2x-3}}$؟

بەراوردی بەها قەدەغەکراوەکانی x لە برە ئالۆزەکە وبەها قەدەغەکراوەکانی برە سادەکراوەکە بکە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەم برە ڕێژەییانە سادەبکە.

4 $\frac{x^2-25}{x^2-10x+25}$

5 $\frac{4x^2}{5}\times\frac{30}{x^4}\times\frac{30x^3}{60}$

6 $\frac{x^2+8x+12}{x^2+2x-15}\times\frac{x^2+8x+15}{x^2+9x+18}$

7 $\frac{x^2-2x+1}{x^2+6x+8}\div\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

8 $\dfrac{\frac{2x-6}{x^2+9x+20}}{\frac{x^2-9}{x^2+5x+4}}$

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

ئەم برە ڕێژەییانە سادەبکە.

9 $\frac{4x^2+8x+4}{x+1}$

10 $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$

11 $\frac{15}{x^2}\times\frac{x^5}{12}\times\frac{4}{x}$

12 $\frac{36x}{9x^2}\times\frac{12x^7}{2x}\times\frac{5}{x^2}$

13 $\frac{x^2-10x+9}{x^2+2x-3}$

14 $\frac{-x^2-x+6}{x^2-5x+6}$

15 $\frac{x}{9x^8}\times\frac{x^7}{2x}\times\frac{45}{x^4}$

16 $\frac{-5}{x^3}\times\frac{-x^5}{3}\times\frac{-4}{x}\times\frac{20}{x^3}$

17 $\frac{x^2-4x-5}{x^2-3x+2}\times\frac{x^2-4}{x^2-3x-10}$

18 $\frac{x^2-9}{x^2-4x+4}\times\frac{x^2-4}{x^2-x-6}$

19 $\frac{2x^2-2x}{x^2-9}\div\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$

20 $\frac{4x^2+20x}{9+6x+x^2}\div\frac{x+5}{x^2-9}$

21 $\frac{x^2}{4}\times\left(\frac{xy}{6}\right)^{-1}\times\frac{2y^2}{x}$

22 $2xy\div\frac{2x^2}{y}\div\frac{2y^2}{x}$

ئەم برانە سادە بکە.

23 $\dfrac{\frac{(x+2)^2}{(x+3)^2}}{\frac{x+3}{x+2}}$

24 $\dfrac{\frac{x^2-4}{x^2-9}}{\frac{(x-2)^2}{(x-3)^2}}$

25 $\dfrac{\frac{x^2-9x+14}{x^2-6x+5}}{\frac{x^2-8x+7}{x^2-7x+10}}$

26 $\dfrac{\frac{x^2+4x+3}{x^2+6x+8}}{\frac{x^2+9x+18}{x^2+7x+10}}$

27 $\frac{2x+3}{x-1}\div\dfrac{\frac{x}{x-1}}{\frac{3x}{2x+3}}$

28 $\dfrac{\frac{x+3}{x-1}}{x(x-1)^{-1}}$

29 $\frac{1-7x^{-1}-18x^{-2}}{1-4x^{-2}}$

30 $\frac{1+12x^{-1}+27x^{-2}}{x^{-1}+9x^{-2}}$

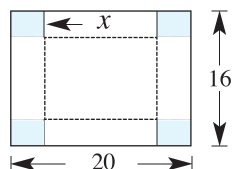
بەرەنگاری

31 بڕیکی ڕێژەیی R بنووسە بە جۆرێك کە پلەی سەرە وژێرەکەی 2 بێت وهاوکۆڵکەی ڕادە سەرەکیەکەی 1 بێت و پاسادانی ئەم پەیوەندیە بکات:

$$\frac{-10+3x+x^2}{15-18x+x^2}\times R=\frac{x-2}{x-3}$$

گرێدان

32 ئەندازە: لاوەند دەیەوێ کارتۆنێکی سەرکراوە بە بەکارهێنانی پارچە کارتۆنێکی لاکێشەیی درێژیەکەی 20cm وپانییەکەی 16cm دروستبکات. پێویستە چوار گۆشەی بچووك درێژی لایەکی x cm بێت لەهەر یەك لە سەرەکاندا ببڕێت. پاشان لاکانی بنوشتێنێتەوە.



أ ڕوونبکەوە کە بڕی $x(20-2x)(16-2x)$ قەبارەی قوتووە (سەر کراوەکە) دەنوێنێت.

ب ڕوونبیکەوە کە بڕی $320-4x^2$ ڕووبەری گشتی ناوەوەی قوتووە(سەر کراوەکە) دەنوێنێت.

ج ڕێژەی نێوان قەبارەی قوتووەکە بۆ ڕووبەرە گشتیەکەی بنووسە. ئەو برە سادەبکە.

د ڕێژە دەستکەوتووەکەی پرسیاری پێشوو چۆن دەگۆڕێت ئەگەر x لە سفرەوە تا 4 زیاد بکات؟

جێبەجێکردنەکان

33 **ئابووری** ئالان دوکانێکی بچووکی بابۆڵەی هەیە تێچوونی مانگانەی ئیشپێکردنی 400 000 دینارە تێکڕای تێچوونی یەك بابۆڵەش 4.45 هەزار دینارە.

أ لە لیستی نرخەکانەوە ناوەندە ژمێرەیی بابۆڵەیەك چەندە؟

ب ئەگەر ئالان لە مانگی پێشودا x بابۆڵەی فرۆشتبێت، بڕی (m) بنووسە کە پەیەوەندی نێوان تێچوونی گشتی وتێچوونی بابۆڵەکان بنوێنێت.

ج بڕێك بنووسە ڕێژەیی قازانجی ئالان لە فرۆشتنی x بابۆڵە بۆ تێچوونی گشتی دەربخات.



ڕوانینێك بۆ دواوە

هاوکێشەی ڕاستەهێڵەکان بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین بنووسە، کە بەخاڵی پێدراوەکەدا دەڕوات وئەستوونە لەسەر ڕاستەهێڵە پێدراوەکە.

34 $y=-6x-1$ ؛ $(8,-4)$

35 $y=\frac{1}{5}x-11$ ؛ $(3,5)$

ئەم بڕانە بە شێوەی گشتی ڕادەدار بنووسە.

36 $x^2(x^3-x^2-6x+2)$

37 $(x-2)(3x^3-6x-x^2)$

ئەم بڕانە شیتەڵبکە.

38 $8x^2-4x$

39 $12x^2-3x+6$

40 $12-4x-22x^2$

41 x^3-1

42 $125x^3+27$

43 x^3-6x^2-8x

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

ئەمانە سادەبکە.

44 $\frac{5}{8}+\frac{1}{8}$

45 $\frac{3}{x}+\frac{1}{x}$

46 $\frac{3}{2x}+\frac{1}{x}$

47 $\frac{3}{2x}+\frac{1}{3x}$

وانەی 4

کۆکردنەوە و لێدەرکردنی برە ڕێژەییەکان

Adding and Subtracting Rational Expressions



بۆچی

بۆ شیکار کردنی زۆر لە پرسیارەکانی ژیانی ڕۆژانەمان پێویستمان بە کۆکردنەوە و لێدەرکردنی برە ڕێژەییەکان دەبێت، وەك هەژمارکردنی تێکرای خێرایی لە گەشتێکدا.

ئامانجەکان

- برە ڕێژەییەکان کۆدەکات و لێدەردەکات و ئەنجامەکەی بەساداترین شێوە دەنووسێت.

جێبەجێکردنەکان

گەشت

تاکسیەك گەشتیارێکی لە فرۆکەخانەوە گواستەوە بۆ ماڵەوەیان بە خێراییەك تێکراکەی 55km/h بێت ولە ڕێگای گەڕانەوەی بۆ فرۆکەخانە، بە هۆی قەڵەباڵغی هاتووچۆوەتێکرای خێراییەکەی 45km/h بێت. تێکرای خێرایی ئۆتۆمبیلەکە لە چوون وگەڕانەوەدا چەند بووە؟ پێویستیت بە کۆکردنەوەی دوو بڕی ڕێژەیی دەبێت. نەك ناوەڕاستی هەردوو خێراییەکە کە لەوانەیە وا بیری لێ بکەیتەوە. کۆکردنەوەی دوو بڕی ڕێژەیی کە هەمان ژێرەیان هەبێت وەك کۆکردنەوەی دوو ژمارەی ڕێژەیی وایە هەمان ژێرەیان هەبێت.

ژمارە ڕێژەییەکان

$$\frac{1}{7}+\frac{3}{7}=\frac{1+3}{7}=\frac{4}{7}$$

ژێرە هاوبەش

برە ڕێژەییەکان

$$\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^2}=\frac{3+5}{x^2}=\frac{8}{x^2}$$

ژێرە هاوبەش

نموونە 1

ئەمانە سادەبکە.

أ $\frac{2x}{x+3}+\frac{5}{x+3}$

ب $\frac{x^2}{x-3}-\frac{9}{x-3}$

شیکار

أ $\frac{2x}{x+3}+\frac{5}{x+3}=\frac{2x+5}{x+3}$

ب $\frac{x^2}{x-3}-\frac{9}{x-3}=\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=x+3$

تێبینی ئەوە بکە $x=3$ ژمارەیەکی قەدەغەکراوە بۆ گۆڕاوی x لە برە بنەڕەتیەکەدا.

هەوڵبدە

ئەمانە سادەبکە.

أ $\frac{3x-1}{2x-1}+\frac{5+2x}{2x-1}$

ب $\frac{2x}{x-5}-\frac{10}{x-5}$

بۆ کۆکردنەوەی دوو بڕی ڕێژەیی ژێرە جیاوان، پێویستە ژێرەی هاوبەش دوو ژێرەکە بدۆزیتەوە. بچووکترین ژێرەی هاوبەش بۆ دوو بڕی ڕێژەیی بریتیە لە بچووکترین چەند جارەی هاوبەشی ژێرەکان، ڕادەیەکە بە پلەیەکی کەمتر کە دابەش هەردوو ژێرەکە دەبێت.

دۆزینەوەی بچووکترین ژێرەی هاوبەش بۆ دوو بڕی ڕێژەیی لە دۆزینەوەی بچووکترین ژێرەی هاوبەشی دوو ژمارەی ڕێژەیی دەچێت. بەراوردی بەکارهێنانی ئەم کردارە بکە بۆ ژمارە ڕێژەییەکان وبڕە ڕێژەییەکان.

ژمارە ڕێژەییەکان

$$\frac{7}{300}+\frac{1}{90}=\frac{7}{300}\times\left(\frac{3}{3}\right)+\frac{1}{90}\times\left(\frac{10}{10}\right)$$
$$=\frac{21+10}{900}=\frac{31}{900}$$

بچووکترین ژێرە هاوبەش

بڕە ڕێژەییەکان

$$\frac{7}{3x^2}+\frac{1}{9x}=\frac{7}{3x^2}\times\left(\frac{3}{3}\right)+\frac{1}{9x}\times\left(\frac{x}{x}\right)$$
$$=\frac{21+x}{9x^2}$$

بچووکترین ژێرە هاوبەش

کۆکردنەوە و لێدەرکردنی بڕە ڕێژەییەکان
Adding and Substracting Rational Expressions

بۆ ئەوەی دوو بڕی ڕێژەیی کۆبکەیتەوە ولە یەکتریان دەربکەیت، بچووکترین ژێرەی هاوبەش بدۆزەوە ودوو بڕەکە دووبارە بنووسە وبە بەکارهێنانی بچووکترین ژێرەی هاوبەشیان، پاشان کۆبکەوە یان لێدەربکە وئەنجامە دەستکەوتووەکە بە سادەترین شێوە بنووسە.

نموونــــــە 2

$\frac{x}{x-2}+\frac{-8}{x^2-4}$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

شیکار

$$\frac{x}{x-2}+\frac{-8}{x^2-4}=\frac{x}{x-2}+\frac{-8}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{x}{x-2}\times\frac{x+2}{x+2}+\frac{-8}{(x-2)(x+2)}$$ بچووکترین ژێرەی هاوبەشی بریتیە لە $(x-2)(x+2)$

$$=\frac{x(x+2)-8}{(x-2)(x+2)}$$ دوو بڕەکە کۆبکەوە

$$=\frac{x^2+2x-8}{(x-2)(x+2)}$$ ژێرە لەسەر شێوەی گشتی بنووسە

$$=\frac{(x+4)(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$ سەرە شیتەڵبکە

$$=\frac{x+4}{x+2}$$ کورتبکەوە

هەوڵبدە $\frac{x}{x+5}+\frac{-50}{x^2-25}$ کورتبکەوە

خاڵی چاودێری ✔ چۆن شیتەڵکردنی ڕادەرەکان یارمەتیت دەدات بۆ کۆکردنەوە ولێکدەرکردنی دوو بڕی ڕێژەیی؟ ئەمە بەکردار دیاربکە لە سادەکردنی بڕی $\frac{x}{x-3}+\frac{5}{x^2-6x+9}$

نموونە 3

$\frac{6x}{3x-1}-\frac{4x}{2x+5}$ کورتبکەرەوە.

شیکار

$$\frac{6x}{3x-1}-\frac{4x}{2x+5}=\frac{6x}{3x-1}\times\left(\frac{2x+5}{2x+5}\right)-\frac{4x}{2x+5}\times\left(\frac{3x-1}{3x-1}\right)$$

بچووکترین ژێرەی هاوبەش بریتیە لە $(3x-1)(2x+5)$

$$=\frac{6x(2x+5)}{(3x-1)(2x+5)}-\frac{4x(3x-1)}{(3x-1)(2x+5)}$$

$$=\frac{12x^2+30x}{(3x-1)(2x+5)}-\frac{12x^2-4x}{(3x-1)(2x+5)}$$

$$=\frac{34x}{(3x-1)(2x+5)}=\frac{34x}{6x^2+13x-5}$$

خاڵی چاودێری ✔ ژمارە قەدەغەکراوەکان لە برە بنەڕەتیەکەدا و ژمارە قەدەغەکراوەکان لە برە سادەکراوەکەدا دیاربکە. ئایا هەمان ژمارەن؟ هۆکەی ڕوونبکەرەوە.

هەوڵبدە $\frac{1}{x^2-4}-\frac{6}{x^2-2x}$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

هەندێ جار وا پێویست دەکات برە ئاڵۆزەکان بە شێوەی برە ڕێژەییەکان بنووسیتەوە بۆ ئەوەی بتوانیت کۆیان بکەیتەوە ولەیەکتریان دەربکەیت وەک لە نموونەی 4 دادەرکەوێت.

نموونە 4

برى $\frac{1}{1-\frac{1}{a}}+\frac{1}{1+\frac{1}{a}}$ کورتبکەوە.

شیکار

$$\frac{1}{1+\frac{1}{a}}+\frac{1}{1-\frac{1}{a}}=\frac{1}{\frac{a+1}{a}}+\frac{1}{\frac{a-1}{a}}$$

لەهەر ژێرەیەك کۆکردنەوەی ولێکدەرکردن بکە

$$=1\times\frac{a}{a+1}+1\times\frac{a}{a-1}$$

برە ئاڵۆزەکە بگۆڕە بۆ برى ڕێژەیى

$$=\frac{a}{a+1}+\frac{a}{a-1}$$

$$=\frac{a}{a+1}\times\left(\frac{a-1}{a-1}\right)+\frac{a}{a-1}\times\left(\frac{a+1}{a+1}\right)$$

$$=\frac{a^2-a}{(a+1)(a-1)}+\frac{a^2+a}{(a+1)(a-1)}$$

بچووکترین ژێرەی هاوبەشی بریتیە لە $(a+1)(a-1)$

$$=\frac{2a^2}{a^2-1}$$

هەوڵبدە برى $\frac{a}{a+\frac{1}{a}}-\frac{a}{a-\frac{1}{a}}$ کورتبکەوە.

نموونە 5 بەگەڕانەوە بۆ پرسیارەکەی سەرەتای وانەکە، تێکڕای خێرایی تەکسیەکە بدۆزەوە لە ماوەی گەشتەکە (چوون وگەڕانەوە)؟

شیکار باگۆڕاوی d هێمای دووری نێوان فرۆکەخانە ومالّی گەشتیارەکە بێت و t_1 هێمای کاتی خایەنراوی گەشتەکە بێت لە فرۆکەخانە بۆ مالّی گەشتیارەکەو t_2 هێمای کاتی خایەنراوی گەڕانەوە بێت بۆ فرۆکەخانە.

$d = 55 \times t_1$ وهەروەها $d = 45 \times t_2$

بەمەش $t_1 = \frac{d}{55}$ و $t_2 = \frac{d}{45}$

بۆ هەژمێر کردنی تێکڕای گشتی خێرایی، دووری گشتی $2d$ بەسەر کاتی خایەنراوی گشتی $(t_1 + t_2)$ دابەشبکە:

$$\text{تێکڕای گشتی خێرایی} = \frac{\text{دووری گشتی}}{\text{کاتی گشتی}}$$

$$v = \frac{2d}{t_1+t_2}$$

لە جیاتی t_1 و t_2 بەهاکانیان دابنێ

$$= \frac{2d}{\frac{d}{55}+\frac{d}{45}}$$

بچووکترین ژێرەی هاوبەش بریتییە لە 495

$$= \frac{2d}{\frac{9d+11d}{495}}$$

$$= \frac{2d}{\frac{20d}{495}}$$

$$= 2d \times \frac{495}{20d}$$

$$= 49.5$$



بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە وا دابنێ خێرایی ئۆتۆمبیلەکە لە چوون akm/h لە کاتژمێرێك بێت وخێراییەکەی لە هاتنەوە bkm/h لە کاتژمێرێك بێت. ڕوونیبکەوە کە تێکڕای خێرایی $\frac{a+b}{2}$ نییە.

ڕاهێنـــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 چۆن بچووکترین ژێرەی هاوبەش دەدۆزێتەوە بۆ کۆکردنەوەی $\frac{x-1}{x^2-36} + \frac{x+5}{x^2-7x+6}$ ؟

2 لەم چوار برانە دوو بڕی یەکسان هەڵبژێرە.

أ $\frac{3+7}{x^2+4}$ ب $\frac{10}{x^2} + \frac{10}{4}$ ج $\frac{3}{x^2} + \frac{7}{4}$ د $\frac{3}{x^2+4} + \frac{7}{x^2+4}$

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەم بڕانە کورتبکەوە.

3 $\frac{3x}{x-1}+\frac{2}{x-1}$

4 $\frac{3x+5}{x+2}-\frac{x+1}{x+2}$

5 $\frac{12}{x^2-1}+\frac{4}{x+1}$

6 $\frac{x+1}{2x-1}-\frac{2x+1}{x-1}$

7 $\frac{1}{1-\frac{1}{a}}$

8 **گەشت** بەگەڕانەوە بۆ نموونەی سەرەتای وانەکە، تێکرای گشتی خێرایی تەکسیەکە هەژمار بکە، ئەگەر تێکرای خێرایی چوون $52Km$ لە کاتژمێرێك و تێکرای خێرایی گەڕانەوە $38Km$ لە کاتژمێرێك بێت.

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

ئەم بڕانە کورتبکەوە.

9 $\frac{2x-3}{x+1}+\frac{6x+5}{x+1}$

10 $\frac{7x-13}{2x-1}+\frac{x+9}{2x-1}$

11 $\frac{n+9}{4}+\frac{n-3}{2}$

12 $\frac{x+7}{3}-\frac{4x+1}{9}$

13 $\frac{x}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}$

14 $\frac{2x}{x+3}-\frac{x-3}{x^2+6x+9}$

15 $\frac{-4}{x-5}+\frac{5}{x+3}$

16 $\frac{2}{x+2}-\frac{6}{x-2}$

17 $\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}$

18 $\frac{8}{3x-5}+\frac{7}{2x+3}$

19 $\frac{2x+3}{x+3}+\frac{x}{x-2}$

20 $\frac{x+2}{2x-1}-\frac{2x}{x-1}$

21 $x^2+\frac{2x}{3x-5}$

22 $\frac{x+1}{(x-1)^2}+\frac{x-2}{x-1}$

23 $2x^2-1-\frac{x-1}{x+2}$

24 $\frac{\frac{3}{2x-1}}{x}$

25 $\frac{\frac{1}{3x+1}}{2}$

26 $\frac{\frac{4}{x-1}}{\frac{2}{x-1}}+\frac{3}{x-1}$

27 $\frac{\frac{4}{x+2}}{\frac{x+2}{3}}-\frac{3}{x+2}$

28 $\frac{\frac{x+2}{x+5}}{\frac{x-1}{x+5}}+\frac{1}{x+1}$

29 $\frac{\frac{2x+10}{x-1}}{\frac{x+5}{x^2-1}}-\frac{4}{x+1}$

30 $\frac{1-xy^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}$

31 $\frac{x-y}{x^{-1}-y^{-1}}$

32 $\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x^2}+2(xy)^{-1}+\frac{1}{y^2}}$

ئەم بڕانە بۆ بڕی ڕێژەیی بگۆڕە وبەسادەترین شێوە بینووسە.

33 $\frac{3x}{x-1}+\frac{5x+2}{x-1}-\frac{10}{x-1}$

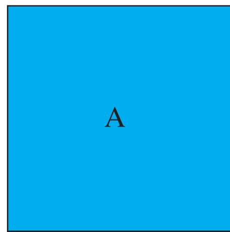
34 $\frac{7x}{x^2-1}+\frac{x}{x^2-1}-\frac{6}{x^2-1}$

35 $\frac{7}{x+7}+\frac{-x}{x-7}-\frac{2x}{x^2-49}$

36 $(x-y)^{-1}-(x+y)^{-1}$

37 $(x-y)^2-(x+y)^{-2}$

38 $\frac{x}{x-y}-\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{y}{x+y}$



39 ئەندازە: لەم شێوەی بەرامبەردا چەند چوارگۆشەیەك دەبینین درێژی لایەكی چوار گۆشەی یەكەم $1cm$ ودووەمیان $\frac{1}{2}$cm وسێیەمیان $\frac{1}{4}$cm بێت وەهەروەها.

أ سەرجەمی رووبەری چوار گۆشەكان a و b و c و d، بە بەكارهێنانی هێزەكانی ژمارە 2 بنووسە

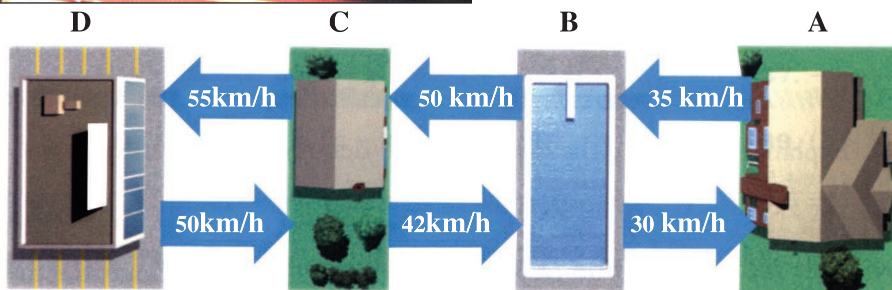
ب سەرجەمەكە بە یەك ژمارەی رێژەیی بنووسە.

ج ئەگەر دوو چوارگۆشەی نوێی e و f بۆ شێوازەكە زیادكرا. سەرجەمی رووبەری شەش چوار گۆشەكە لە a هەتا f بدۆزەوە بە شێوەی یەك ژمارەی رێژەیی.

د وەڵامەكانی ب و ج بگۆرە بۆ ژمارەیەكی دەیی لە پێكهاتبێت لە 4 رەنووس لە پاش فارزە. ئایا دەتوانیت كەرتێك بخەملێنیت كە نزیكبێت لە سەرجەمی رووبەری چوار گۆشەكان هەرچەند چوار گۆشەكان زیادبكەین؟ ئەم كەرتە چییە؟



40 گەشت ئەم هێڵكارییەی خوارەوە قۆناغەكانی گەشتێك بە ئۆتۆمبیل دیاردەكات. دووری نێوان A و B ونێوان B و C ونێوان C و D یەكسانن. لەهێڵكارییەكە تێكرای خێرایی ئۆتۆمبیلەكە لەهەر قۆناغێكدا دیاریكراوە.



أ تێكرای گشتی خێرایی گەشتی A بۆ C هەژمێربكە وبەپێچەوانەوە.

ب تێكرای گشتی خێرایی گەشتی B بۆ D هەژمێربكە وبەپێچەوانەوە.

ج تێكرای گشتی خێرایی گەشتی A بۆ D هەژمێربكە وبەپێچەوانەوە.

روانینێك بۆ دواوە

برى جیاكەرەوەی ئەم هاوكێشانە هەژمێربكە وژمارەی رەگەكانیان لە كۆمەڵەی ژمارە راستییەكان دیاریبكە وهاوكێشەكانی شیكاربكە.

41 $0 = x^2 - 3x + 4$ **42** $x^2 - 2x + 1 = 0$ **43** $-2x^2 - 5x + 12 = 0$

روانینێك بۆ پێشەوە

44 هەموو شیكارەكانی هاوكێشەی $\frac{(x+3)(x-1)}{x^2-1} = 1.4$ دیاریبكە.
لەبیرنەكەیت ژمارە قەدەغەكراوەكانی x لە برە رێژەییەكە لابدەیت.

هاوکێشەکان ولاسەنگە ڕێژەییەکان

Rational Equations and Inequalities

وانەی 5



ئامانجەکان

- هاوکێشە ولاسەنگە ڕێژەییەکان بە جەبری و بە ڕوونکردنەوەیی شیکاردەکات.
- پرسیارەکان بە بەکارهێنانی هاوکێشە ولاسەنگە ڕێژەییەکان شیکار دەکات.

بۆچی
زۆر شێوازی جۆراجۆر هەیە بە هاوکێشە یان لاسەنگەیەکی ڕێژەیی دەنوێنرێت. بۆ نموونە دەتوانیت هاوکێشەیەکی ڕێژەیی بنوسین بۆ دۆزینەوەی تێکڕایی خێرایی گشتی لە پێشبڕکێیەکی سیانی.

جێبەجێ کردن
پێشبڕکێی سیانی

زۆزك پێشبڕکێیەکی سیانی کە بریتیبوو لە مەلەوانی وپاسکیل سواری و ڕاکردن بە دوو کاتژمێر و نیو تەواوکرد. تێکڕای خێراییەکەی لە پاسکیل سواریەکەدا، ئەوەندەی تێکڕای خێراییەکەی بێت لەمەلەکردندا. تێکڕای خێرایی ڕاکردنەکەی $5Km/h$ زیاتر بێت لە تێکڕای خێرایی مەلەکردنەکەی. دەتوانیت هاوکێشەیەکی ڕێژەیی بنووسیت بۆ هەژمێر کردنی تێکڕایی خێرایی گشتی زۆزك لەپێشبڕکێکەدا. هاوکێشە ڕێژەییەکان ئەو هاوکێشانەن کە بە لایەنی کەمەوە بڕێکی ڕێژەیی تێدایە.

	دووری Km	خێرایی Km/h	کات
مەلەکردن	$d_s = 0.5$	x	t_s
پاسیکل سواری	$d_b = 25$	$6x$	t_b
ڕاکردن	$d_r = 6$	$x+5$	t_r

نموونە 1 تێکڕای خێرایی گشتی زۆزك هەژمێربکە.

شیکار

1. کاتی خایەنراوی هەر قۆناغێك هەژماربکە.

قۆناغی مەلەکردن

دووری = خێرایی × کات

$$0.5 = xt_s$$

$$\frac{0.5}{x} = t_s$$

قۆناغی پاسکیل سواری

دووری = خێرایی × کات

$$25 = (6x)t_b$$

$$\frac{25}{6x} = t_b$$

قۆناغی ڕاکردن

دووری = خێرایی × کات

$$6 = (5+x)t_r$$

$$\frac{6}{x+5} = t_r$$

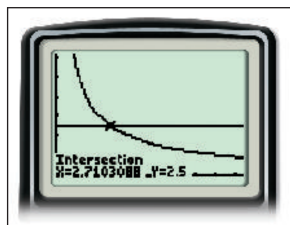
2. برێکی ڕێژەیی بنووسە کە کاتی خایەنراوی گشتی پێشبڕکێیەکە بنوێنێ بە پێی تێکڕای خێرایی زۆزك لە مەلەکردن x.

$$T(x) = t_s + t_b + t_r = \frac{0.5}{x} + \frac{25}{6x} + \frac{6}{x+5}$$

$$= \frac{0.5}{x} \times \frac{6(x+5)}{6(x+5)} + \frac{25}{6x} \times \frac{(x+5)}{(x+5)} + \frac{6}{x+5} \times \frac{6x}{6x}$$

$$= \frac{64x+140}{6x(x+5)}$$

بچووکترین ژێرەی هاوبەش بریتیە لە $6x(x+5)$



هاوکێشەی $\frac{64x+140}{6x(x+5)} = 2.5$ شیکاربکە.

وێنە نەخشەی $y = \frac{64x+140}{6x(x+5)}$ بکێشە.

$y = 2.5$ پۆی خاڵەکانی یەکتربڕین دیاربکە.

تێکڕای خێرایی گشتی زۆزك $2.7Km/h$ بووە بە نزیککراوەیی.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە چۆن هاوکێشەی $\frac{64x+140}{6x(x+5)} = 2.5$ شیکار دەکەیت بە بەکارهێنانی یاسای شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا؟

نموونە 2 هاوکێشەی $\frac{x}{x-6} = \frac{1}{x-4}$ شیکاربکە.

شیکار

ڕێگای یەکەم: بەجەبری

$$\frac{x}{x-6} = \frac{1}{x-4} \qquad x \neq 6 \quad x \neq 4$$

$$x(x-4) = 1 \times (x-6)$$

$$x^2 - 4x = x - 6$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0$$

$$x = 2 \qquad x = 3$$

ساغبکەوە

ئەگەر $x = 2$ ئەوا

$$\frac{x}{x-6} = \frac{1}{x-4}$$

$$\frac{2}{2-6} = \frac{1}{2-4}$$

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$ ڕاستە

ئەگەر $x = 3$ ئەوا

$$\frac{x}{x-6} = \frac{1}{x-4}$$

$$\frac{3}{3-6} = \frac{1}{3-4}$$

$$-1 = -1$$ ڕاستە

کەواتە 2 و 3 دوو شیکاری هاوکێشەکەن.

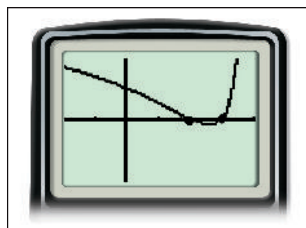
ڕێگای دووەم: بە ڕوونکردنەوەیی

لەبەر ئەوەی بینینی یەکتربڕینی چەماوەی نەخشەی $y = \frac{x}{x-6}$ وچەماوەی نەخشەی $y = \frac{1}{x-4}$ کارێکی گرانە پێویستە ڕێگایەکی تر بەکاربهێنیت.

هاوکێشەکە بە شێوەی $\frac{x}{x-6} = \frac{1}{x-4}$

پاشان $\frac{x}{x-6} - \frac{1}{x-4} = 0$ بنووسە.

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y = \frac{x}{x-6} - \frac{1}{x-4}$ بکێشە وپۆی سینی خاڵەکانی یەکتربڕین لەگەڵ تەوەرەی سینی دیاربکە.



هەوڵبدە هاوکێشەی $\frac{x}{3} = \frac{1}{x-2}$ شیکاربکە هەندێ جار شیکاری هاوکێشە ڕێژەییەکان، شیکاری نامۆی لێدەکەوێتەوە، پاسادانی هاوکێشە بنەڕەتیەکە ناکات. لێرەوە پێویستی پاسادانی بەها پەیدا بووەکانت بۆ دەردەکەوێت کە دەبنە شیکاری هاوکێشەکە.

نموونە 3

هاوکێشەی $\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$ شیکاربکە.

شیکار

ڕێگای یەکەم: بە جەبری

هەردوو لای هاوکێشەکە لە بچووکترین ژێرەی هاوبەشی $(x-3)(x+3)$ یان x^2-9 بدە.

$$\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$$ کاتێک $x\neq\pm3$.

$$\frac{x}{x-3}\times(x-3)(x+3)+\frac{2x}{x+3}(x-3)(x+3)=\frac{18}{x^2-9}(x-3)(x+3)$$

$$x(x+3)+2x(x-3)=18$$

$$x^2+3x+2x^2-6x=18$$

$$3x^2-3x-18=0$$

$$3(x^2-x-6)=0$$

$$3(x-3)(x+2)=0$$

$x=3$ یان $x=-2$

ساغبیکەوە

لەبەر ئەوەی دوو ژمارەی 3 و3– قەدەغەکراون، ئەوا $x=3$ شیکارێکی نامۆیە وپێویستە فەرامۆش بکرێت. بەڵام ئەگەر $x=-2$ ئەوا :

$$\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}\stackrel{?}{=}\frac{18}{x^2-9}$$

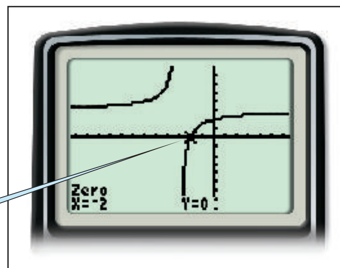
$$\frac{-2}{-2-3}+\frac{2(-2)}{-2+3}\stackrel{?}{=}\frac{18}{(-2)^2-9}$$

$-\frac{18}{5}=-\frac{18}{5}$ دروستە

ڕێگای دووەم: بەڕوونکردنەوەیی

لەبەر ئەوەی بینینی یەکتربڕینی هەردوو چەماوەی $y=\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}$ و $y=\frac{18}{x^2-9}$ کارێکی گرانە بۆیە پێویستە ڕێگایەکی تر بەکاربێنیت $\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}-\frac{18}{x^2-9}=0$ بنووسە.

پاشان وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}-\frac{18}{x^2-9}$ بکێشە.



تەنها خاڵی یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری سینی بریتییە لە (2,0–)

هاوکێشەکە تەنها یەك شیکاری هەیە. بریتیە لە $x=-2$

هەوڵبدە هاوکێشەی $\frac{x}{x-2}+\frac{x}{x-3}=\frac{3}{x^2-5x+6}$ شیکاربکە.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە بۆچی لە نموونەی 3 دا شیکارێکی نامۆمان بۆ دەرچوو؟ هۆکەی ڕوونبکەرەوە.

لاسەنگە ڕێژەییەکان Rational Inequalities ئەو لاسەنگانەن بە لایەنی کەمەوە بڕێکی ڕێژەییان تێدایە.

چالاکی

شیکارکردنی لاسەنگە ڕێژەییەکان Solving Rational Inequalities

خاڵی چاودێری ✓

1. لە ڕووتەختی پۆتانەکاندا. هەردوو هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y_1 = \frac{x+2}{x-4}$ و $y_2 = 2x-11$ بکێشە.
2. بەهایەکانی x کامانەن کە پاساودانی $y_1 = y_2$ ؟ $y_1 < y_2$ ؟ $y_1 > y_2$ دەکەن
3. چۆن بە ڕوونکردنەوەیی لاسەنگەی $\frac{x+2}{x-4} < 2x-11$ ولاسەنگەی $\frac{x+2}{x-4} > 2x-11$ شیکار دەکەیت؟

نموونە 4 لاسەنگەی $\frac{x}{2x-1} \le 1$ شیکاربکە.

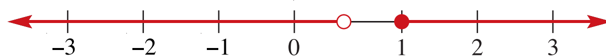
شیکار

ڕێگای یەکەم: بە جەبری

هەوڵبدە بە لێکدانی هەردوولای لاسەنگەکە لە $2x-1$ خۆت لە ژێرە ڕزگار بکەیت بەڵام لێکدانی لاسەنگە لە ژمارەیەک لەوانەیە ئاراستەی لاسەنگەکە هەڵبگەڕێتەوە. بۆیە پێویستە لە دوو بارا لێبکۆڵینەوە. کاتێک $2x-1$ موجەب بێت، کاتێک $2x-1$ سالب بێت.

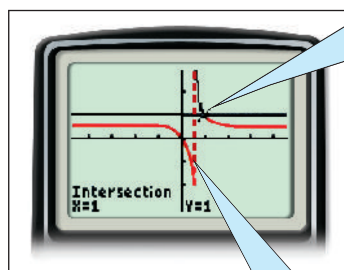
$\frac{x}{2x-1} \le 1$ کاتێک $2x-1>0$ موجەب بێت	$\frac{x}{2x-1} \le 1$ $2x-1<0$ سالب بێت
$x \le 2x-1$	$x \ge 2x-1$ (گۆڕا بۆ $\geqslant$)
$-x \le -1$	$-x \ge -1$
$x \ge 1$ (گۆڕا بۆ $\geqslant$)	$x \le 1$ (گۆڕا بۆ $\leqslant$)
لەم بارەدا کاتێک $2x-1>0$ ئەوە $x > \frac{1}{2}$ بۆیە بەهاکانی x کەپاساودانی لاسەنگەکە دەکەن، پێویستە پاساودانی $x > \frac{1}{2}$ و $x \ge 1$ پێکەوە بکەن.	لەم بارەدا کاتێک $2x-1<0$ ئەوا $x < \frac{1}{2}$ بۆیە بەهاکانی x کە پاساودانی لاسەنگەکە دەکەن پێویستە پاساودانی $x < \frac{1}{2}$ و $x \le 1$ پێکەوە بکەن.
{کۆمەڵەی شیکار لەم بارەدا بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان کە $x \ge 1$ ساغدەکاتەوە}	{کۆمەڵەی شیکار لەم بارەدا بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان کە $x < \frac{1}{2}$ ساغدەکاتەوە}

کەواتە کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەکە هەموو ئەو ژمارە ڕاستییانەن کە پاساودانی $x < \frac{1}{2}$ یان $x \ge 1$ دەکەن



ڕێگای دووەم: بە ڕوونکردنەوەیی

لە ڕووتەختی پۆتانێدا هەردوو هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y_1 = \frac{x}{2x-1}$ و $y_2 = 1$ بکێشە بەهاکانی x لەوناوچەیەدا دیاربکە، کە تیایدا هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی یەکەم دەکەوێتە ژێر هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی دووەم. کۆمەڵە شیکار بریتییە لە بەهاکانی x کە پاساودانی $x < \frac{1}{2}$ یان $x \ge 1$ دەکەن.



ڕاستەهێڵی $x = \frac{1}{2}$ دەرکەناری شاوڵییە

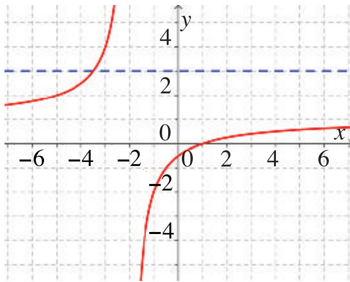
هەوڵبدە هاوکێشەی $\frac{x-1}{x+2} < 3$ شیکاربکە.

ڕاهـێـــنـــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 مانای چییە یەکێك لە شیکارەکانی هاوکێشەیەکی ڕێژەیی نامۆیە؟چۆن دەیناسیتەوە؟

2 چۆن هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی بەکاردەهێنیت بۆ دڵنیابوون لە ڕاستی ئەو شیکارەی بە جەبری بەدەستهێناوە؟



3 چۆن هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y_1 = \frac{x-1}{x+2}$ ونەخشەی $y_2 = 3$ لە وێنەی بەرامبەردا بەکاردێنیت بۆ شیکاری لاسەنگەی $\frac{x-1}{x+2} > 3$ ؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

4 **وەرزش** بەگەڕانەوە بۆ نموونەی سەرەتای وانەکە. خێرایی زۆزك لە هەریەکە لە مەلەوانی و پاسکیل سواری و ڕاکردندا چەندە؟ ئەگەر ماوەی پێشبڕکێکە بە دووکاتژمێر تەواو بکات.

ئەمانە شیکاربکە.

5 $\frac{2x-1}{x} = \frac{3}{x+2}$

6 $\frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{-4}{x^2-1}$

ئەمانە شیکاربکە.

7 $\frac{2x-3}{x} \geq 2$

8 $\frac{1}{x+2} < \frac{1}{x+3}$

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

ئەمانە شیکاربکە و ڕاستی شیکارەکەت ساغبکەوە.

9 $\frac{x+3}{2x} = \frac{5}{8}$

10 $\frac{2y-1}{4y} = \frac{4}{6}$

11 $\frac{4}{n+4} = 1$

12 $\frac{-6}{m-3} = 1$

13 $\frac{1}{3x} + \frac{1}{8} = \frac{4}{3x}$

14 $\frac{1}{a} + \frac{1}{3} = \frac{8}{3a}$

15 $\frac{y+3}{y-1} = \frac{y+2}{y-3}$

16 $\frac{2n+1}{3n+4} = \frac{2n-8}{3n+8}$

17 $\frac{x+3}{x} + 1 = \frac{x+5}{x}$

18 $\frac{2x}{x+3} - 1 = \frac{x}{x+3}$

19 $\frac{x+1}{x-1} + \frac{2}{x} = \frac{x}{x+1}$

20 $\frac{3}{x+2} - \frac{x}{1} = \frac{4}{3}$

21 $\frac{1}{6} - \frac{1}{x} = \frac{4}{3x^2}$

22 $\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2} = \frac{1}{4}$

23 $\frac{2x+3}{x-1} - \frac{2x-3}{x+1} = \frac{10}{x^2-1}$

24 $\frac{x-4}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{17}{x^2-4}$

25 $\frac{a}{a+3} - \frac{a}{a-2} = \frac{10}{a^2+a-6}$

26 $\frac{3x}{x-1} + \frac{2x}{x-6} = \frac{5x^2-15x+20}{x^2-7x+6}$

27 $\frac{3}{x+2} + \frac{12}{x^2-4} = \frac{-1}{x-2}$

28 $\frac{x+2}{2x-3} - \frac{x-2}{2x+3} = \frac{21}{4x^2-9}$

ئەمانە شیکار بکە وپاشان ساغیبکەوە.

29 $\frac{x+3}{3x}>2$ **30** $\frac{y+5}{4y}>3$ **31** $\frac{x-5}{3x}<-3$

32 $\frac{x-5}{3x}<3$ **33** $\frac{2x+1}{x-2}>4$ **34** $3<\frac{3x+4}{1+2x}$

35 $\frac{x+1}{x}\leq\frac{1}{2}$ **36** $-\frac{1}{2}\geq\frac{1}{x-4}$ **37** $\frac{7x}{3x+2}<2$

ئەم لاسەنگانە شیکار بکە وەڵامەکەت بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

38 $x^2<\frac{1}{2}$ **39** $\frac{1}{x}\leq x-1$ **40** $\frac{x-2}{x-1}\geq 2x$

بەرەنگاربونەوە

41 بەهزری لاسەنگەی $\frac{3}{(x-1)^2}>0$ شیکار بکە.

42 **دەروازەیەك لە ڕۆشنبیری هندی** لە سەدەی ١٩ دا زانای بیرکاری هندی ماهافیرا ئەم پرسیارەی دانا. چوار بۆری ئاو ڕووەدکەنە ناو حەوزێکەوە. یەکەمیان بە تەنها حەوزەکە بە نیو سەعات پڕ دەکات، دووەم بە تەنها بە سێیەکی سەعاتێك و سێیەم بە چارەکە سەعاتێك وچوارەم بە پێنجیەکی سەعاتێك پڕی دەکات. کاتی پێویست چەندە ئەگەر هەموویان بەیەکەوە ئاو ڕووبکەنە ناو حەوزەکە؟ هەریەکێکیان بڕی چەند ئاو دەکەنە حەوزەکەوە؟

بەستنەوە

43 ئەندازە درێژی لاکێشەیەك 5 مەتری زیاترە لە پانیەکەی. درێژی وپانی لاکێشەکە هەژمێر بکە ئەگەر ڕێژەی درێژەیەکەی بۆ پانیەکەی کەمتر نەبێ لە 1.5 وزیاتر نەبێ لە 3.

جێبەجێکردنەکان

44 **وەرزش** ئاراس بەشداری پێشبرکێیەکی سیانی کرد. $0.6Km$ بە مەلە و $15Km$ بەسواری پاسکیل و $8Km$ بەڕاکردن بڕی. تێکڕای خێراییەکەی لە پاسکیلەکەدا 9 ئەوەندەی تێکڕایی خێراییەکەی بوو لە مەلەکردندا. تێکڕایی خێراییەکەی لە ڕاکردندا $6Km/h$ لە تێکڕایی خێرایی مەلەکردنەکەی زیاترە.

أ نەخشەیەکی ڕێژەیی بنووسە بە پێی خێراییەکەی لە مەلەکردندا. ئەوکاتە بنوێنێت کە ئاراس دەیخایەنێت بۆ بڕینی دووری پێشبرکێکە.

ب تێکڕای خێرایی ئاراس لە مەلەکردن وسواری پاسکیل وڕاکردندا چەند بووە؟ ئەگەر زانیت بە یەك کاتژمێر ونیو پێشبرکێکەی تەواو کردوە.

45 **فیزیا** نەخشەی $w(h)=w_0\left(\frac{6400}{6400+h}\right)^2$ کێشی تەنێکە لە بەرزی $h\ Km$ لە بۆشایی ئاسماندا. w_0 کێشی هەمان تەنە لەسەر زەوی. بەرزی ئەو مانگە دەستکردە چەندە؟ کێشەکەی $200\ Kg$ لە بۆشایی ئاسماندا و $3500\ Kg$ لەسەر زەوی بێت.

ڕوانینێك بۆ دواوە

بەهای ئەم برانە هەژماربکە.

46 $81^{\frac{1}{2}}$ **47** 13^0 **48** $9^{\frac{3}{2}}$ **49** $27^{\frac{1}{3}}$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

50 بە بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی وێنەی نەخشەی $f(x)=\sqrt{x}$ بکێشە. وێنەی ئەو نەخشەکیە بەوێنەدانەوە بە دەوری تەوەری x دا پێکبهێنە. تێبینی چی دەکەیت؟

نەخشەی ڕەگی دووجا Radical Functions

وانەی
6

ئامانجەکان

- نەخشەی ڕەگی دووجا دەناسێت و هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی دەکێشێت.
- بەهای بڕی ڕەگی دووجا هەژمێردەکات.



بۆچی

نەخشەی ڕەگی دووجا بەکاردێت بۆ نواندنی چەندها پەیوەندی لەژیانی ڕۆژانەماندا وەك ئەو پەیوەندییەی کە درێژی بەندوڵ دەبەستێتەوە بەکاتی خایەنراوی لەرەیەکی تەواوی بەندوڵەکە.

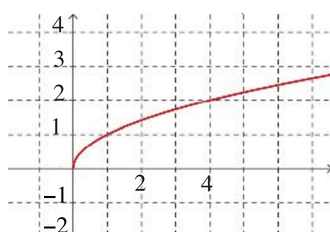
جێبەجێ کردنەکان

فیزیا

نەسرین تێبینی ئەوەی کرد کە لەرەی تەواوی بەندوڵێکی درێژ کاتێکی زیاتری پێویستە لە لەرەی تەواوی بەندوڵێکی کورت. بەکاتی خایەنراوی لەرەیەکی تەواوی بەندوڵێك دەوترێت خولی بەندوڵ. نەخشەی $t(x)=2\pi\sqrt{\frac{x}{9.8}}$ خولی بەندوڵ بە چرکە بە پێی درێژییەکەی بەمەتر دەنوێنێت خولی بەندوڵێك چەندە درێژییەکەی $0.1m$ و $0.2m$ و $0.3m$ بێت؟

نەخشەی ڕەگی دووجا Square - Root Function

لەبیرت بێت ڕەگی دووجای ژمارەی x بریتییە لە ژمارەیەك ئەگەر لە خۆی بدرێت ژمارەکەت دەستدەکەوێت. هەروەها لەبیرت بێت ژمارەی سالب ڕەگی دووجای نییە لە ژمارە ڕاستییەکاندا وهەموو ژمارەیەکی موجەبی وەك x دوو ڕەگی دووجای هەیە یەکێکیان موجەبە بە $\sqrt{x}$ دەنووسرێت وئەوی تریان سالبە و بە $-\sqrt{x}$. نەخشەی ڕەگی دووجا نەخشەیەی بە ڕێسای $f(x)=\sqrt{x}$ دەناسرێت. بە پێی بابەتەکانی پێشوو بواری ئەم نەخشەیە هەموو ژمارە ڕاستییە ناسالبەکانە و مەوداکەشی هەمان کۆمەڵە ژمارەیە. بەڵام هێڵکاری ڕوونکردنەوەکەی لەو وێنەی بەرامبەردا دەردەکەوێت.



نموونە 1

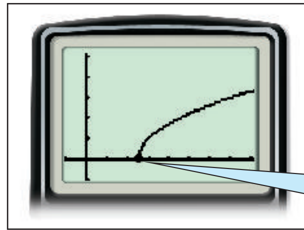
بواری نەخشەی $f(x)=\sqrt{2x-5}$ دیاریبکە.

شیکار

بواری ئەم نەخشە پێکدێت لە هەموو ژمارە ڕاستییەکانی وەك x کە بەهای بڕی $2x-5$ دەکاتە ژمارەیەکی نا سالب. بۆ دیاریکردنی ئەم بوارە، تەنها پێویستیت بە شیکاری لاسەنگەی

$2x-5\geq 0$ دەبێت $2x-5\geq 0$

$x\geq \frac{5}{2}=2.5$



(2.5, 0)

دڵنیابە بواری نەخشەی $f(x)=\sqrt{2x-5}$ بریتییە لە $x\geq \frac{5}{2}$.

نموونە 2

بەگەڕانەوە بۆ نموونەی بەندۆلەکە لە سەرەتای وانەکە، **خولی بەندۆلەکە** هەژمێربکە. کە درێژییەکەی $0.1m$ و $0.2m$ و $0.3m$ بێت.

شیکار

نەخشەی $y=2\pi\sqrt{\frac{x}{9.8}}$ لە بژمێری ڕوونکردنەوەیی تۆماربکە و بە بەکارهێنانی کاری خشتەیی

X	Y_1
0	0
.1	.6347
.2	.8976
.3	1.0993
.4	1.2694
.5	1.4192
.6	1.5547

X=0

خولی بەندۆلێك درێژییەکەی *0.1* بێت بریتییە لە *0.6* چرکە بەنزیکەیی

خولی بەندۆلێك درێژییەکەی *0.2* بێت بریتییە لە *0.9* چرکە بەنزیکەیی

خولی بەندۆلێکی درێژییەکەی *0.3* بێت بریتییە لە *1.1* چرکە بەنزیکەیی

کورتکردنەوەی بڕە ڕەگییەکان — Symplifiying Radical Expressions

بڕە ڕەگییەکان **Radical Expressions** ئەو بڕانەن کە بە لایەنی کەمەوە بڕێك لەخۆدەگرێت وەدەکەوێتە ژێر ڕەگە دووجاکەدا.

نموونە 3

بڕە ڕەگی $\sqrt{49a^2b^5x^6}$ کورتبکەوە.

لەبیرت بێت کە
$\sqrt{b^2}=|b|$

شیکار

$$\sqrt{49a^2b^5x^6}=\sqrt{7^2a^2b^5x^6}=7|a|b^2|x^3|\sqrt{b}$$

هەوڵبدە بڕە ڕەگی $\sqrt{64a^4bx^3}$ کورتبکەرەوە.

هاوکێشە ڕەگییەکان — Radical Equations

نموونە 4

هاوکێشەی $2\sqrt{x+5}=8$ شیکاربکە وشیکارەکەت ساغبکەرەوە.

شیکار

$$2\sqrt{x+5}=8$$
$$\sqrt{x+5}=4$$
$$\left(\sqrt{x+5}\right)^2=4^2$$ بەدوو جاکردنی هەردوو لا
$$x+5=16$$
$$x=11$$

ساغکردنەوە $2\sqrt{x+5}=8$

$2\sqrt{11+5}=8$

$2\times 4=8$ دروستە

هەوڵبدە هاوکێشەی $3\sqrt{2x-1}=6$ شیکاربکە.

لە کاتی شیکاری هەندێك لە هاوکێشە ڕەگییەکان شیکاری نامۆمان بۆ دەردەچێت لەبەر ئەوە پێویستە ساغکردنەوەی شیکارەکەت بکەیت بۆ دوورخستنەوەی ئەم جۆرە شیکارانە.

نموونە 5 هاوکێشەی $\sqrt{x+1}+3=2x$ شیکاربکە و شیکارەکە ساغبکەرەوە.

شیکار

$\sqrt{x+1}+3=2x$

$\sqrt{x+1}=2x-3$ ڕەگەکە لە لایەکی هاوکێشەکە دابنێ

$\left(\sqrt{x+1}\right)^2=(2x-3)^2$ هەردوو لای هاوکێشەکە دووجابکە

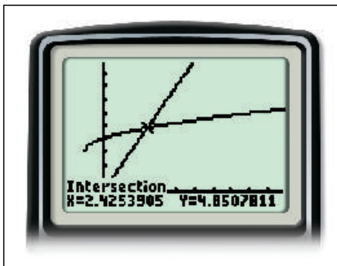
$x+1=4x^2-12x+9$

$4x^2-13x+8=0$ هاوکێشە دووجایەکە بەشێوەی گشتی بنووسە

$x=\frac{-(-13)\pm\sqrt{13^2-4\times4\times8}}{2\times4}$ یاسا بەکاربهێنە بۆ شیکاریکردنی هاوکێشە دووجاکە

$x=\frac{13-\sqrt{41}}{8}\approx 0.82$ یان $x=\frac{13+\sqrt{41}}{8}\approx 2.43$

ساغبکەرەوە



هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی دوو نەخشەی $y=\sqrt{x+1}+3$ و $y=2x$ بکێشە وبەدوای پۆی خاڵەکانی یەکتربرین بگەڕێ، یەك خاڵی یەکترین هەیە کە پۆیەکەی بریتییە لە $x\approx 2.43$ کەواتە هاوکێشەکە تەنها یەك شیکاری هەیە کە بریتییە $x=\frac{13+\sqrt{41}}{8}\approx 2.43$ وشیکارەکەی تر شیکارێکی نامۆیە.

هەوڵبدە هاوکێشەی $\sqrt{x-1}=\sqrt{2x+1}$ شیکاربکە وپاسادانی شیکارەکەت بکە.

هەندێ لە هاوکێشە ڕەگییەکان شیکاری نییە، وەك لەم نموونەیەدا دەردەکەوێت.

نموونە 6 هاوکێشەی $\sqrt{x}-1=\sqrt{2x+1}$ شیکاربکە وپاسادانی شیکارەکەت بکە.

شیکار

$\sqrt{x}-1=\sqrt{2x+1}$

$\left(\sqrt{x}-1\right)^2=\left(\sqrt{2x+1}\right)^2$ هەردوو لای هاوکێشەکە دووجا بکە.

$x-2\sqrt{x}+1=2x+1$

$-2\sqrt{x}=x$ کورتبکەوە

$\left(-2\sqrt{x}\right)^2=(x)^2$ هەردوو لای هاوکێشەکە دووجا بکە.

$4x=x^2$

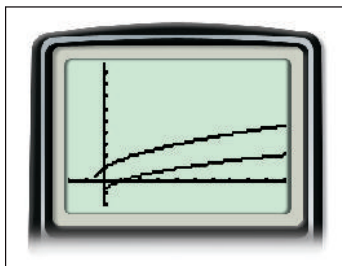
$$x^2-4x=0$$
$$x(x-4)=0$$
$x=0$ یان $x=4$

ساغبکەوە

$\sqrt{0}-1\overset{?}{=}\sqrt{2\times0+1}$ $\sqrt{4}-1\overset{?}{=}\sqrt{2\times4+1}$

$-1=1$ هەڵەیە $1=3$ هەڵەیە

دەشتوانی بە ڕوونکردنەوەیی وەڵامەکەت ساغبکەیتەوە وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=\sqrt{x}-1$ و $y=\sqrt{2x+1}$ بکێشە و ساغبکەوە کە یەکتر نابڕن.



هەوڵبدە $3\sqrt{x}+2=\sqrt{3x}$ شیکاربکەو ڕاستی وەڵامەکەت ساغبکەرەوە.

ڕاهێـــــنـــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 چۆن بڕی $\sqrt{4x^3}$ سادە دەکەیت؟

2 دوو ڕێگای جیاواز بەکاربێنە بۆ شیکاری $\sqrt{x}=3\sqrt{x-4}$

3 بۆچی دەبێت لە شیکارکردنی هاوکێشە ڕەگییەکان پاسادانی ئەو شیکارانە بکەیت کە بە جەبری دەستمان دەکەوێت.

4 چۆن بە جەبری وڕوونکردنەوەیی ڕوونیدەکەیتەوە هاوکێشەی $\sqrt{x}=\sqrt{x+1}$ شیکاری نییە؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

5 بڕی $\sqrt{128ab^2x^5}$ سادەبکە.

6 بڕی $\frac{12\sqrt{15x^3}}{(3x)^{\frac{1}{2}}}$ سادەبکە، وای دابنێ x تەنها بەهای موجەب وەردەگرێت.

7 هاوکێشەی $3\sqrt{2x-5}=20$ شیکاربکە وشیکارەکەت ساغبکەرەوە.

8 هاوکێشەی $\sqrt{5x+7}-2=x$ شیکاربکە وشیکارەکەت ساغبکەرەوە.

9 هاوکێشەی $2\sqrt{x+1}=\sqrt{x}-3$ شیکاربکە وشیکارەکەت ساغبکەرەوە.

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

ئەم بڕانە سادەبکە.

10 $\sqrt{32x^3}$ 11 $\sqrt{18x^3}$ 12 $\sqrt{27x^3y^4}$

13 $\sqrt{50a^3b^4}$ 14 $\left(16x^6\right)^{\frac{1}{4}}$ 15 $\left(40a^7\right)^{\frac{1}{3}}$

16 $\frac{x}{3-5\sqrt{2}}-\left(2+3\sqrt{2}\right)$ 17 $\frac{x}{4+\sqrt{3}}-\left(-1+3\sqrt{2}\right)$

بواری ئەم نەخشانە دیار بکە.

18 $f(x)=\sqrt{12x+24}$

19 $f(x)=\sqrt{3x-2}$

20 $f(x)=\sqrt{3(x-2)}$

21 $f(x)=\sqrt{3(x+2)-1}$

22 $f(x)=\sqrt{2-3(x+1)}$

23 $f(x)=\sqrt{3-2(x-4)}$

24 $f(x)=\sqrt{x^2-25}$

25 $f(x)=\sqrt{9x^2-16}$

26 $f(x)=\sqrt{x^2+5x+6}$

27 $f(x)=\sqrt{x^2+10x-25}$

28 $f(x)=\sqrt{2x^2+5x-12}$

29 $f(x)=\sqrt{3x^2+7x+2}$

30 $f(x)=\sqrt{6x^2-13x+5}$

31 $f(x)=\sqrt{8x^2-10x-3}$

32 بواری نەخشەی $f(x)=\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}$ دیاربکە لە وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکەوە وەڵامەکەت ساغبکەوە.

جێبەجێکردن

33 **ڕووداوەکانی هاتووچۆ:** لێکۆڵەرەوەکانی ڕووداوی هاتووچۆ سوود لە نەخشەیەك وەردەگرن بۆ دۆزینەوەی خێرایی ئەو ئوتۆمبیلە لە کاتی ڕوداوێکدا بە پێوانی شوێنەواری تایەی ئوتۆمبیلەکە لەسەر ڕێگاکەدا. کە لە ئەنجامی شێلانی ڕاگرەکەوە دروست دەبێت. ئەم نەخشە لە ڕۆژانی ساماڵدا بریتیە لە $y=\sqrt{80x}$ کاتێك x خێرایی ئوتومبیلەکەیە بە کیلۆمەتر لەکاتژمێرێکدا و m درێژی شوێنەوارەکە بێت بە مەتر.

أ نەخشەی پێشوو بە سادەترین شێوە بنووسە بە بەکارهێنانی ڕەگی دووجا پاشان بینووسەوە بە بەکارهێنانی ژمارە دەیییەکان.

ب لێکۆڵەرەوەکە درێژی شوێنەواری تایەکەی پێوا و بینی 200m دەبێت خێرایی ئوتۆمبیلەکە بە نزیکترین کیلۆمەتر لە کاتژمێرێك هەژماربکە.

ج ئایا خێراییەکەی دوو ئەوەندی لێدێت ئەگەر شوێنەوارەکەش دوو ئەوەندە زیادبکات؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەرەوە.

تێڕوانینێك بۆ دواوە

ئەم برانە سادەبکەرەوە وای دابنێ سفر بەهای قەدەغەکراوی گۆڕاوەکانە.

34 $\left(-2y^3y^5\right)^2$

35 $2x^4\left(-3xy^2\right)^3$

36 $\left(5x^{-2}y^4\right)^{-1}$

37 $\left(\frac{-3xy^3}{x^{-4}y^5}\right)^3$

38 $\left(\frac{-4m^4n^{-2}}{m^2n^{-2}}\right)^{-1}$

39 $\left(\frac{3m^4n^2}{2m^0n^{-3}}\right)^{-2}$

سفرەکانی ئەم نەخشانە دیاریبکە.

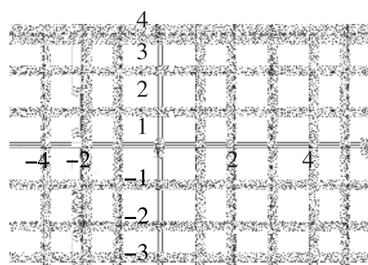
40 $f(x)=x^2+9x+18$

41 $f(x)=x^2-2x-8$

42 $f(x)=x^2-3x-18$

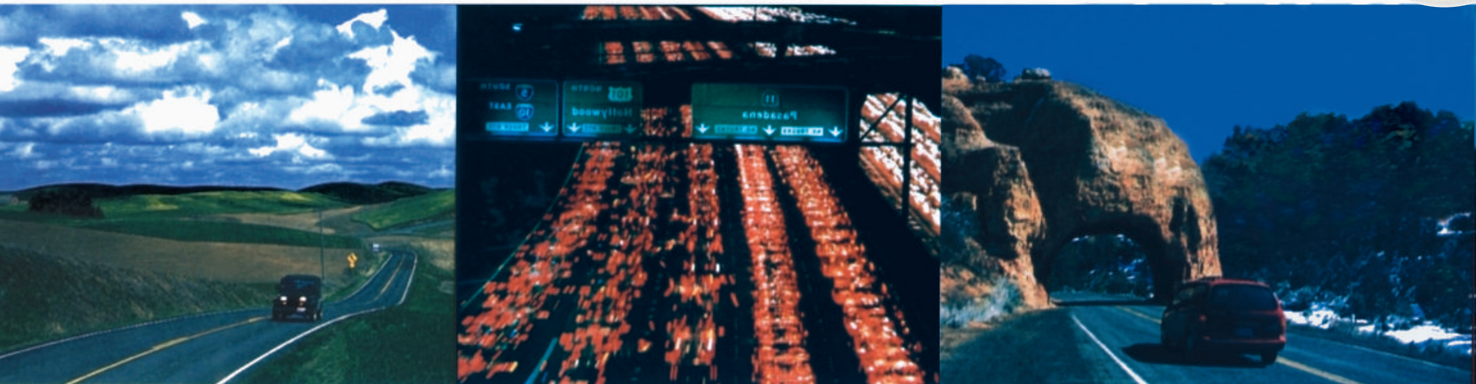
تێڕوانینێك بۆ پێشەوە

43 بیردۆزی فیثاغورس بەکاربێنە بۆ هەژمارکردنی دووری نێوان ئەو دوو خاڵەی لە شێوەکەی بەرامبەرتدا دیاریکراوە.



پڕۆژەی بەش

کام ناوەند هەڵدەبژێریت؟



بۆ هەر کۆمەڵە بەهایەك دوو ناوەند هەیە کە ناوەندە ژمارەیی وناوەندە گونجاون. ناوەندە ژمێرەیی دوو ژمارەی b و c بریتیە لە $\frac{a+b}{2}$ بەڵام ناوەندە گونجاو بۆ دوو ژمارەی b ، c بریتیە لە $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

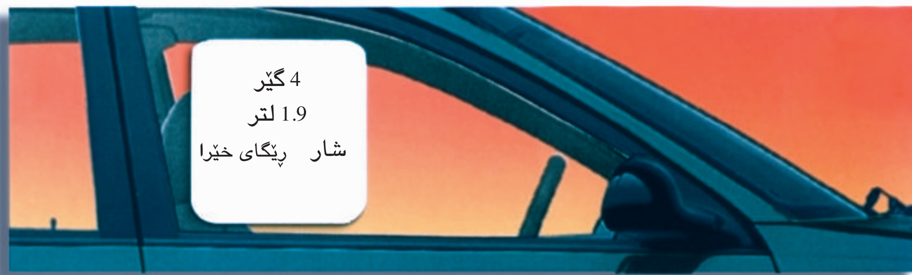
لە هەندێك شیكاری پرسیارەكان پشت بە ناوەندە ژمارەیی دەبەسترێت، بەڵام لە شیكاری هەندێكی تردا پشت بە ناوەند گونجاو دەبەسترێت. پشتبەستن بە یەكێك لەم دوو ناوەندە كارێكی جیاكەرەوەیە، چۆن ئەنجامەكان لەهەردوو بارەكەدا ڕەنگە بە تەواوەتی جیاوازبن.

بە ئامانجی پێدانی پێوەرێك كە ڕێگە بدات بە خەڵكانێك بەراوردی بەكاربردنی بەنزینی ئوتومبیلە نوێیەكان بكەن كە چەند گڵدانەوەی بەنزین دەكات.

دەزگای پاراستنی ژینگە بڵاوكراوەكانی بەسەر جامی ئوتۆمبیلەكاندا هەڵواسی كە تیایدا بڕی بەنزینی بەكاربراو تێداپشاندراوە. بۆنموونە دەزگاكە خەمڵاندنی ئوتۆمبیلێك كە 4 گێرو فراوانی مەكینەكەی 1.9 لیتر بێت یەك گالۆن بەنزین بۆ 39 كیلومەتر لەناوشار ویەك گالۆن بۆ 54 كیلومەتر لەسەر ڕێگای خێرا. وەزارەتی وزە لە هەندێك وولاتان ڕابەرێكی ساڵانە بڵاودەكاتەوە كە یاریدەدەری ئەو كەسانە دەدات كە دەیانەوێ ئۆتۆمبیلی تازە بكڕن. ئەم ڕابەرە مەزندەی بەكاربوونی ووزە بۆ هەر جۆرێك لە ئوتۆمبیلە تازەكان دیاریدەكات و ئەم ڕابەرە وریاكردنەوەی بەكارهێنەرەكان وریا دەكاتەوە.

وریاكردنەوەی خاوەن ئوتۆمبیلەكان

تكایە ئاگاداری ئەوە بن ناوەندەكان كە بەكاربردنی ئوتۆمبیلەكان لەناو شارەكاندا یان لەسەر ڕێگا خێراكان دەست نیشان دەكات تەنها خەملاندنە ڕەنگە خەملانەكە هەڵە تێبكرێت بۆ تێچوونی ساڵانەی ئوتۆمبیلەكە.



چالاكی 1

1 ناوەندە ژمێرەیی بۆ بەكاربردنی ئەو ئوتۆمبیلەی لەوێنەكەی سەرەوەدایە هەژمار بكە لەهەموو ڕۆیشتنەكەیدا.

2 ناوەندە گونجاو بۆ بەكاربردنی ئەو ئوتۆمبێلەی، لەوێنەكەی سەرەوەدا دیارە هەژمێر بكە لە هەموو ڕۆیشتنەكەیدا.

3 لەهەردوو ناوەندەكە بكۆڵەوە هۆكاری ئاگاداركردنەوەی ڕابەرەكە شیبكەرەوە.





چالاکی 2

لەوانەیە ژمارەی ئەو کیلۆمەترانەی ئوتۆمبیلێك دەیبرێت لە شاردا یەکسان نەبێت بە ژمارەی ئەو کیلۆمەترانەی کە دەیبرێت لەسەر ڕێگا خێراکان. ئەمەش وا دەکات کە هەژمێری ناوەندە سالانە کە بیرۆکەی بەکارچوونی سالانە دەدا بکرێت، هێمای گۆڕاوی d_1 بۆ ژمارەی کیلۆمەترەکانی ناوشار وگۆڕاوی d_2 بۆژمارەی کیلۆمەترەکانی سەر ڕێگای خێرا لەساڵێکدابن.

بۆ هەژمێری ژمارەی گالۆنە بەکاربراوەکان لە ساڵێکدا هەڵدەستین بەم هەژمارانە:

ناو شار: $$(d_1\,\text{km})\left(\frac{\text{Galon}}{39\,\text{km}}\right)=\frac{d_1}{39}\,\text{gal}$$

لەسەر ڕێگای خێرا: $$(d_2\,\text{km})\left(\frac{\text{Galon}}{54\,\text{km}}\right)=\frac{d_2}{54}\,\text{gal}$$

دەکرێ بەکارچوونی سالانەی ئوتۆمبیل بە هۆی برێکی ڕێژەیی وەك لای خوارەوە دەرببرێت:

ناوەندە بەکاربردنی سالانە

$$a(d)=\frac{\text{ژمارەی کیلومەتری سالانە}}{\text{ژمارەی گالۆنی سالانە}}=\frac{d_1+d_2}{\frac{d_1}{39}+\frac{d_2}{54}}$$

1 وای دابنێ ئەو ئوتۆمبیلەی کە لەسەرەوە باسکراوە بکرێت. ئەوا ناوەندە بەکارچوونی سالانەی بەنزین چەندە ئەگەر $800Km$ لەناو شار و $400Km$ لەسەر ڕێگا خێراکان بڕوات؟

2 هەژماری تێچوونی بەنزینی ئوتۆمبیلەکە لە ساڵێکدا بکە ئەگەر نرخی یەك گاڵۆن لە بەنزین 700 دینار بێت.

چالاکی 3

ئامانج مەشق لەسەر پایسکل سواری دەکات، هەموو ڕۆژێك $2Km$ دەبڕێت. لە کیلۆمەتری یەکەمدا خێراییەکەی $20Km/h$ و لە کیلۆمەتری دووەمدا خێراییەکەی $10Km/h$ ئەویش بە هۆی هیلاکیەوە.

1 ئایا ناوەندە ژمێرەیی هەردوو خێراییەکە دەربرین لە تێکڕای خێرایی ئامانج دەکات لەوماوەیدا؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

2 هەژماری ئەو خێراییە بکە کە پێویستە ئامانج پیێ بڕوات لە کیلۆمەتری دووەمدا بۆ ئەوەی تێکڕای خێراییەکەی لەم دوو کیلۆمەترەدا $15Km/h$ بێت.

5

پێداچوونەوەی بەش

1 گۆڕاوی m ڕاستەوانە لەگەڵ گۆڕاوی b و پێچەوانە لەگەڵ گۆڕاوی c دەگۆڕێت بەهای m چەندە کاتێك $a=9$ و $b=12$ ئەگەر $m=6$ لەکاتێکدا $a=7$ و $b=4$ ؟

2 گۆڕاوی y ڕاستەوانە لەگەڵ گۆڕاوی x وپێچەوانە لەگەڵ گۆڕاوی z دەگۆڕێت. بەهای y چەندە کاتێك $x=20$ و $z=2$ ئەگەر $y=3$ لەکاتێکدا $x=18$ و $z=2$ ؟

بوارو دەرکەنارەکانی هەریەکە لەم نەخشانە دیاریبکە.

3 $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-8x+12}$

4 $f(x)=\dfrac{3x-5}{x^2-25}$

5 $f(x)=\dfrac{x^2+4x-12}{3x^2-12}$

6 $f(x)=\dfrac{x^2-9}{3x+5}$

7 $f(x)=\dfrac{2x}{6x^4-18x^3}$

ئەم برانە سادەبکە.

8 $\dfrac{x^2+6x}{10}\times\dfrac{4}{x^2-36}$

9 $\dfrac{x^2+10x-8}{3x^2-17x+10}\times\dfrac{2x^2+9x-5}{x^2+3x-4}$

10 $\dfrac{4x+8}{5x-20}\div\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-4x}$

11 $\dfrac{2x^2-9}{6}\div\dfrac{4x-12}{x}$

12 $\dfrac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x+2}{x}}$

13 $\dfrac{\frac{a+1}{a^2}}{\frac{(a-1)^2}{a}}$

14 $\dfrac{\frac{x+1}{x}}{\frac{(x+1)^2}{x+2}}$

15 $\dfrac{\frac{4x^2}{6x-3}}{\frac{15x}{2x-1}}$

ئەم برانە سادەبکە.

16 $\dfrac{3x-5}{3x-6}+\dfrac{4x-2}{5x-15}$

17 $\dfrac{9y+3}{y^2-11y+18}+\dfrac{y+3}{y-9}$

18 $\dfrac{2x-3}{x^2-3x}-\dfrac{9x+1}{x-3}$

19 $\dfrac{3y-39}{y^2-7y+10}-\dfrac{3}{y-2}$

20 $\dfrac{2}{\frac{x}{4}}+\dfrac{5}{\frac{x}{3}}$

21 $\dfrac{x}{3+\frac{5}{x}}-\dfrac{4}{1+\frac{2}{x}}$

هەریەکە لەم هاوکێشانە شیکاربکە.

22 $\dfrac{1}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}$

23 $\dfrac{4}{x^2+1}=1$

24 $\dfrac{3x-1}{x^2+2x}=-1$

25 $\dfrac{1}{x^2-1}=1$

26 $\dfrac{2}{1-x^2}=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

27 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{x+2}{x+1}$

28 $\sqrt{x+2}=-2$

29 $\sqrt{x}=2x$

30 $\sqrt{x-2}=\sqrt{x}-2$

ئەم لاسەنگانە بەجەبری شیکاربکە.

31 $\dfrac{1}{x}<1$

32 $\dfrac{1}{x}\geq 2$

33 $\dfrac{1}{x^2+1}<\dfrac{1}{2}$

34 $\dfrac{1}{x^2+1}\geq\dfrac{1}{3}$

35 $\dfrac{x+1}{2x+3}<1$

36 $\dfrac{2x+1}{2x-1}<2$

بەڕوونکردنەوەی هەریەك لەم لاسەنگانە شیکاربکە

37 $\dfrac{1}{x}\geq x$

38 $\dfrac{1}{x^2+2x+1}>2$

39 $\dfrac{1}{x}<2x$

40 $\dfrac{1}{x^2-x+2}<x$

بواری هەریەك لەم نەخشانە دیاریبکە.

41 $f(x)=\sqrt{2x-3}$

42 $f(x)=\sqrt{x}-5$

43 $f(x)=5\sqrt{3(x-1)}+1$



تاقیکردنەوەی بەش

هەموو بەها قەدەغەکراوەکان وهەموو دەرکەنارەکان بۆ هەریەکە لەم نەخشانە دیاریبکە.

1 $f(x)=\frac{x-4}{x^2-16}$

2 $h(x)=\frac{x^2+2x-15}{2x^2-18}$

3 $g(x)=\frac{2x^3-16}{x^3-2x^2-9x+18}$

4 **میکانیك**: باری سلنگێك ڕاستەوانە لەگەڵ گۆڕانی پانیەکەیدا وپێچەوانە لەگەڵ سێجای درێژییەکەی دادەگۆڕێت.سلنگێك پانیەکەی $10m$ و درێژییەکەی $20m$ بێت بارێکی هەڵگرتووە کە $1200Kg$ ئەوا سلنگێك پانیەکەی $8m$ و درێژیەکەی $25m$ چەند دەتوانی هەڵبگرێت.

هەریەك لەم بڕانە سادەبکە

5 $\frac{x^2-9}{2x^2-8x+6}\times\frac{4x^2-12x+36}{x^3+27}$

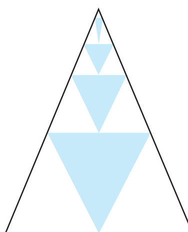
6 $\frac{\frac{x^3}{3x^2-12}}{\frac{x^3+5x^2}{3x^2+9x-30}}$

7 $\frac{3x}{x-2}\div\frac{6x^2}{2x^2-8}\times\frac{5x+1}{2x+4}$

8 $\frac{4}{x^2-4}+\frac{x+3}{x+2}$

9 $\frac{x-37}{x^2-2x-15}-\frac{5}{x+3}$

10 **ئەندازە**: هەژمێری ڕووبەری ناوچە ڕەنگکراوەکە بە پێی ڕووبەری سێگۆشەکەبکە.کە بە گۆڕاوی x هێماکراوە.



هەریەکە لەم هاوکێشە ولاسەنگانە شیکاربکە.

11 $\frac{x+3}{x-1}=2$

12 $\frac{a-4}{a+2}+\frac{a-5}{a-4}=1$

13 $\frac{3}{x+4}\le 5$

14 $\frac{3}{x+4}<\frac{5}{x+7}$

جێگۆری ئەندازەیی دیاربکە کە ڕێگا دەدات بە گواستنەوەی وێنە ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بنەرەتی $y=\sqrt{x}$ بۆ وێنە ڕوونکردنەوەی نەخشەکانی خوارەوە:

15 $y=\sqrt{x-4}$

16 $y=-\sqrt{x}+3$

هەژمارەی x بە پێی y بکە.

17 $y=x^2+x$

18 $y=5x^2-3x-4$

هەژمێری هەریەك لەم بڕانەبکە.

19 $\left(3\sqrt[4]{81}\right)^2-31$

20 $\frac{1}{5}\left[\left(\sqrt{9}\right)^3-\left(\sqrt[3]{64}\right)^2+2\right]$

هەریەك لەم بڕانە سادە بکەوە وای دابنێ هەریەکە لە گۆڕاوەکان جگە لە بەهای موجەب هیچ بەهایەك وەرناگرن.

21 $5\sqrt{8x^3y^6}\times\left(2x^5y\right)^{\frac{1}{2}}$

22 $\frac{8\sqrt{5x^7y^9}}{\sqrt{25x^3y^5a}}$

23 $\left(5-\sqrt{12}\right)-\left(2\sqrt{27}+8\right)$

24 $\left(2+\sqrt{5}\right)\left(3-2\sqrt{5}\right)$

هەریەکە لەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە کە ژێرەیان ڕێژەیین.

25 $\frac{4}{\sqrt{11}}$

26 $\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

27 $\frac{2\sqrt{7}-\sqrt{35}}{35}$

هەریەك لەم هاوکێشە ولاسەنگانە شیکاربکە.

28 $\sqrt{2x+7}=-3$

29 $\sqrt[4]{3x}=\sqrt[4]{4x-7}$

30 $\sqrt{x-7}<0$

31 $\sqrt[3]{2x+1}\ge 3$

5

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

1 ئەگەر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ئەوا کام لەمانەی دێن ڕاستن بە تەواوەتی.

أ $ad=bc$ ج $ad=cb$

ب $\frac{a}{d}=\frac{c}{b}$ د $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

2 $(6\sqrt{8}-6\sqrt{2})(2\sqrt{2}+1)$ سادەبکە.

أ $6\sqrt{2}-24$ ج $6\sqrt{2}+24$

ب $12\sqrt{2}-23$ د $6\sqrt{2}-23$

3 ژمارەی شیکاری سیستمی $\begin{cases} y=3x+2 \\ y=3x-2 \end{cases}$ چەندە؟

أ 0   ج 1

ب 2   د ناکۆتا

4 ماوەی دابەشکردنی $2x^2-5x+8$ بەسەر $x+4$ دا چەندە؟

أ 60   ج -44

ب سفر   د 20

5 $(x^3y^{-2})^{-2}$ سادەبکە.

أ $\frac{y^4}{x^6}$ ج $\frac{1}{x^2y}$

ب $\frac{x^6}{y^4}$ د x^2y

6 کام لەمانەی خوارەوە نابێتە ڕەگی هاوکێشەی $x^3+x^2-9x-9=0$

أ -3 ج -1

ب 3   د 1

7 چ ژمارەیەك لەمانەی خوارەوە بخرێتە سەر x^2-10x بۆ ئەوەی ببێتە دووجایەکی تەواو.

أ 5   ج -25

ب -5 ب 25

8 هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بنووسە کە بەدوو خاڵی $(-3,8)$ و $(-4,9)$ دا دەڕوات.

9 بڕی $25x^2-60x+30$ شیتەڵبکە.

10 بڕی $\frac{x+1}{x^2+4x-4}\div\frac{x^3}{x^2+4}$ سادەبکە.

11 پاش ڕێژەکردنی ژێرەی $\frac{8}{5-3\sqrt{2}}$ بڕەکە سادەبکە.

12 **بەهای ئەوپەڕ** بە بۆنەی چەژنی نەورۆز، شارەوانی شارێك تیری ئاگراوی بە خێراییەکی سەرەتایی $75m$ لە چرکەدا تەقاند. هەژماری ئەوپەڕی بەرزی بکە کە یەکێك لە تیرەکان دەیگاتێ وەهەروەها هەژماری کاتە خایەنراوەکەی بکە ئەگەر بزانیت $h(t)=75t-4.8t^2$ بەرزیە بە پێی کات، h بەرزیە بە مەترو t کاتە بە چرکە.

13 گەورەترین ژمارەی تەواو کامەیە لە پاسادانی $-6x-1>10$ دەکات

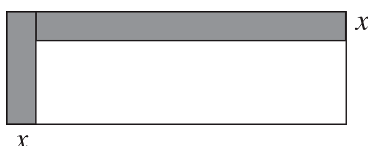
ئەمانە شیکاربکە.

14 $2\sqrt{x-4}=\sqrt{x-2}$

15 $1-2x=5$

16 $-5x+3=\frac{1}{2}x-1$

17 **بۆ خۆشی:** درێژی تەختەی نواندی شانۆیەك $38m$ و پانیەکەی $20m$، بەشێك لە تەختەکە بڕا هەروەك چۆن لە وێنەکەدا دیارە. بەهای x چەندە ئەگەر بزانیت ئەو بڕینە لە ڕووبەری تەختەکە $265m$ دووجا کەمدەکاتەوە.



بەشی شەشەم

ئەگەر و ئامار
Probability and Statistics

1. دەستپێكێك بۆ ئەگەر.
2. گۆڕینەكان و ڕیزكردنەكان.
3. گونجێنەكان.
4. كۆكردنەوەی ئەگەرەكان.
5. ڕووداوە سەربەخۆیەكان.
6. پێوەرەكانی پەرتبوون.

پرۆژەی بەشەكە

پێداچوونەوە

تاقیكردنەوەی بەش

تاقیكردنەوەی كەڵەكەبوو

ئەگەر و ئامار

Probability and Statistics

ئەگەر بریتییە لە هاتنەدی ڕووداوێك كە دەتوانیت نیێشبینی ڕوودانی بكەیت و ناتوانیت ئەنجامەكانی دیاریبەكەیت لەگەڵ ئەوەی كە بەچەند مەرجێكی دیاریكراو پێناسەكراوە. ئەگەرەكان بەكارهێنانی زۆری هەیە بەرچاومان دەكەوێت لە كۆمپانیاكانی دڵنیابوون و دامەزراوەكانی لێكۆڵینەوەی وەك لێكۆڵینەوەی پزیشكی و ئەوانی تر، و لە جێبەجێكردنی یاساكان و لە زانستە ڕامیارییەكاندا.

بەشی

6

وانەكان

1. دەروازەیەك بۆ ئەگەر.
2. گۆڕینەكان و ڕیزكردنەكان
3. گونجێنەكان.
4. كۆكردنەوەی ئەگەرەكان.
5. ڕووداوە سەربەخۆیەكان.
6. پێوەرەكانی پەرتبوون

پڕۆژەی بەش







دەربارەی پرۆژەی بەش

پێشبینییەکی دروست بۆ ئەنجامەکانی ڕووداوە هەڕەمەکییەکان، ڕۆڵێکی گرنگ دەبینێت بۆ بڕیاردان، ئاسان یان ئاڵۆز. لە زۆر بواردا دەتوانرێت پێشبینی ئەگەری ڕووداوێکی هەڕەمەکی دیاریبکرێت بەڕێگای تاقیکردنەوە، ئەویش بە چاودێریکردنی ژمارەی ئەو جارانەی کە ڕووداوەکەی تێیدا دێتەدی. بەڵام لەوانەیە ئەمە نیمچە ستەم بێت کاتێك ڕووداوەکە ئاڵۆز بێت. لەو کاتەدا، مرۆڤ پەنا دەباتە بەر نواندن. لەمەودوا ئەم ڕێگایە بەکاردێت لەکاتی کارکردنتدا. لە دوای کۆتایی ئەم بەشەدا دەتوانیت هەستیت بە ئەمانەی خوارەوە.

- دروستکردنی نموونەکان (سامپڵ) (نموذج) بۆ نواندنی ڕووداوە هەڕەمەکییەکان.
- بەکارهێنانی پێدراوەکان کە لە نواندنەکە دەستدەکەوێت بۆ خەملاندنی ئەگەری ڕووداوەکە.

وانەی 1

دەروازەیەك بۆ ئەگەر

Indroduction To Probability

بۆچی؟

زۆرجار توێژینەوەی ئەگەر بەبەکارهێنانی شتەکان لە ژیاندا وەك بەردەزار یان تیر یان پارچە دراوی کانزایی دەکرێت.



ئامانجەکان

- زاراوەکانی تایبەت بە ئەگەر بەکاردەهێنێت.
- یاسای ژماردنی بنەرەتی بەکاردەهێنێت.
- یەکسانبوون لە ئەگەرەکاندا دەناسێت.
- ئەگەری تیۆری ڕووداوێك دیاریدەکات.

گەلێك کۆمپانیای بازرگانی هەن. لەوانەش کۆمپانیاکانی دڵنیابوون، کارەکانیان بەندە بەو شتانەی کە پێشبینیکردنی ئەنجامەکانیان کارێکی ئاسان نیە، بۆمان هەیە بپرسین: چۆن دەتوانێت قازانج بکات، لەڕاستییدا دەتوانین پێشبینی ئەگەری ڕووداوی کارێك دیاریبکەین لە ڕێگای چاودێریکردنی ئەنجامەکانی بارە زۆرەکان کە لەوانەیە ببنە هۆی ڕوودانی ڕووداوەکە. بۆ نموونە دیاریکردنی ئەگەری مردنی جگەرەکێشێك بە چاودێریکردنی ڕێژەی ئەو کەسانەی کە بەهۆی جگەرەکێشانەوە دەمرن. کە ئەمەش ڕێژەیەکی زۆربەرزە هەروەکو توێژینەوە پزیشکییەکان سەلماندویانە. لە خوێندنی ئەگەرەکان کۆمەڵێك زاراوە بەکاردەهێنرێت خوێندکار پێویستە فێریان ببێت وبە شێوەیەکی دروست بەکاریان بهێنێت. ئەم خشتەی خوارەوە پێناسەکانی هەندێ لە زاراوەکانمان بۆ ڕووندەکاتەوە هەروەکو ڕوونکراوەتەوە بە نموونەی هەڵدانی بەردەزارێك.

پێناسە	نموونە
کاری هەڕەمەکی Trial: کارێکە ناتوانین پێشەکی ئەنجامەکەی دیاریبکەن	هەڵدانی بەردەزاێك
تاقیکردنەوە(هەڕەمەکی) Experiment: کارێکی هەڕەمەکییە یان دووبارەبوونەوەی کارە هەڕەمەکیەکەیە چەند جارێك	هەڵدانی بەردەزارێك 10جار
کۆمەڵەی ئەنجامەکان(بۆشایی نموونە) Sample Space : کۆمەڵەی هەموو ئەنجامەکانی لە توانادابێت لە کارێکی هەڕەمەکیدا.	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
ڕووداو Event : ئەنجامێکی لە توانادایە یان کۆمەڵێك ئەنجامی لە توانادایە.	دەستکەوتنی 3 یان دەستکەوتنی ژمارەیەکی تاك

بە ئەنجامەکانی کارێکی هەڕەمەکی دەڵێین ئەگەری یەکسان ئەگەر لە توانادابێت هەموو ئەو ئەنجامانەی دەردەکەون یەکسان بن. لەڕاستیدا سەلماندنی ئەوەی هەموو ئەنجامەکانی کاری هەڕەمەکی لە ژیاندا ئەگەر تیایاندا یەکسان بن کارێکی گرانە. بەڵام دەتوانین خۆمان وای دابنێین کە وایە. بۆ نموونە دەتوانیت ئەنجامەکانی هەموو کارە هەڕەمەکیەکانی خوارەوە بە ئەگەری یەکسان دابنێیت: هەڵدانی بەردەزارێك، هەڵدانی پارچە دراوێکی کانزایی، ئەنجامی چەرخێکی میلدار، ڕەگەزی لە دایکبوو.

نموونە 1

ئەگەری چاکبوونەوەی یەکێکی توشبوو بە شێرپەنجەی سی چەندە، ئەگەر بزانیت توێژینەوەیەك لەسەر 5000 توشبوو کراوە لەوانە 250 یان چاکبوونەتەوە؟

شیکار

دەتوانیت کۆمەڵەی ئەنجامەکانی 5000 توشبوو، لە نێوانیاندا 250 کەس چاکبووەتەوە ئەگەری چاکبوونەوەی نەخۆشەکە بریتیە لە.

$$P(c) = \frac{250}{5000} = \frac{1}{20} = 0.05 = 5\%$$

هێمای c بەکاردێت بۆ ڕووداوی (چاکبوونەوەی نەخۆش)

نموونە 2

دۆستی بەردەزارێکی هەڵدا ئەگەری دەستکەوتنی یەکێك لە چەند جارەکانی 3 چەندە؟

شیکار

بۆشایی نموونە = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ڕووداوەکە دێتەدی ئەگەر دۆستی 3 یان 6ی دەستبکەوێت.

ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت کە ئەگەری ڕووداوەکە بریتییەلە2 لە بنچینەی 6 واتە:

$$P(M3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0.3333 \approx 33.33\%$$

گریمانM3 هێمایەکە بۆ یەکێك لە چەند جارەکانی 3

ئەگەری تیۆری Theoritical Probability

ئەگەر تاقیکردنەوەیەکی هەرەمەکی دیاریکراو و ڕێکبوو ئەوا ئەگەری ڕووداوێك لە A ڕووداوەکانی بریتییە لە ژمارەی ڕاستی:

$$P(A) = \frac{\text{ژمارەی ئەنجامەکانی کە پاسادانی ڕووداوەکە دەکات}}{\text{ژمارەی هەموو ئەنجامەکان}}$$

بەرەنگاری

چێنەر گۆیەکی لە تورەگەیەکدا ڕاکێشا کە 4 گۆی سوور و 7 گۆی ڕەشی تیدابوو. ئەگەری ئەوەی گۆیە ڕاکێشراوەکە شین بێت چەندە؟

ئەگەر Probability

پێوانەی ئەگەری ڕووداوێك ژمارەیەکی ڕاستییە ودەکەوێتە نێوان سفر ویەك.

ئەگەر ڕووداوەکە ئەستەم بێت **Impossible** ئەوا ئەگەری ڕوودانی = 0

ئەگەر ڕووداوەکە دڵنیایی بێت **Certain** ئەوا ئەگەری ڕوودانی = 1

سەرجەمی ئەگەرەکانی هەموو ئەنجامەکانی لە توانادابێت = 1

ئەگەری تیۆری Theoretical Probability

ئەگەری ڕوداووێك لە ڕووداوەكانی تاقیكردنەوەیەك كە ئەنجامەكەی ئەگەری یەكسانیان هەبێت، بریتیە لە ژمارەیەكی ڕاستی و یەكسانە بەم كەرتە.

$$p(A)=\frac{\text{ژمارەی ئەو بارانەی كە ڕووداوەكە دێنێتەدی}}{\text{ژمارەی هەموو بارە لە تواناكان}}$$

ئەگەرێك

نموونە 3



مەریوان پەپكێكی لە قوتوویەك ڕاكێشا كە 2 پەپكی سوور 4 پەپكی شین و 3 پەپكی زەردی تێدایە.

ئەگەری ئەوەی پەپكە ڕاكێشراوەكە زەرد بێت چەندە؟

شیكار

ئەنجامەكانی ئەم تاقیكردنەوە هەرەمەكیە ئەگەری یەكسانە.دەتوانیت بۆشایی نموونەكە بەم شێوەیە بنوێنین.

ئەگەری ئەوەی پەپكە ڕاكێشراوەكە زەرد بێت 3 لە 9 یە.

$$\left\{R_1, R_2, B_1, B_2, B_3, B_4, Y_1, Y_2, Y_3\right\}$$

Y هێمای ڕوودانی «ڕاكێشانی پەپكی زەردە» $P(Y)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

هەوڵبدە

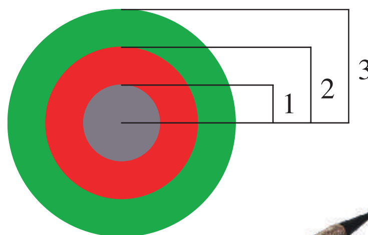
كامەران پەپكێكی لە قوتوویەك ڕاكێشا كە 3 پەپكی سوور و 5 پەپكی شین و 7 پەپكی زەردی تێدابوو. ئەگەری ئەوەی پەپكی ڕاكێشراو شین بێت چەندە؟

بۆشایی نموونە لە نموونەكانی ڕابردوو لە كۆمەڵەیەكی دواهاتوو پێكدێت. لە كاتێكدا تاقیكردنەوەی هەرەمەكی وا هەیە بۆشایی نموونەكە تیایاندا كۆمەڵەیەكی دوانە هاتووە.

نموونە 4

بەستنەوە

ئەندازە



بڕیار تیرێكی هەڵدا بۆ ئەوەی بچەقێت لە پارچە تەختەیەكی بازنەیی كە بەدیوارێكدا هەڵواسرابوو. **ئەگەری ئەوەی تیرەكە بچەقێت لە ناوچەی سەوز چەندە؟**



شیكار

هەر خاڵێك لە خاڵەكانی بازنەكە ئەنجامێك دەردەبڕێت كە لە توانادایە. لەم بارەدا، دەڵێین، كە بۆشایی نموونەكە، كۆمەڵەیەكی دوانەهاتووە، خاڵەكانی ڕووداوەكە دێننەدی بریتین لە خاڵەكانی ناوچە سەوزەكە. بۆ هەژمێركردنی ئەگەری ڕووداوی داواكراو، ڕووبەری ناوچە سەوزەكە بەسەر ڕووبەری گشتی تەختەكە دابەشبكە.

$$P(G)=\frac{\text{ڕووبەری ناوچەی سەوز}}{\text{ڕووبەری گشتی تەختە بازنەییەكە}}=\frac{\pi(3)^2-\pi(2)^2}{\pi(3)^2}=\frac{5\pi}{9\pi}=\frac{5}{9}=0.556=55.6\%$$

كە G هێمایەك بێت بۆ ڕووداوەكە «چەقینی تیرەكە لە ناوچە سەوزەكە».

هەوڵبدە

ئەگەری ئەوەی تیرە كە لە ناوچە سوورەكە بچەقێت چەندە؟

نموونه 5

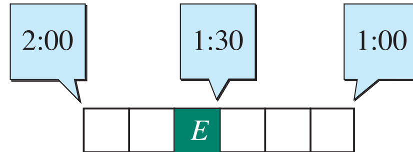
جێبەجێکردنەکانی
بژمێر

شەماڵ ڕۆژانە سەیری پۆستە ئەلکترۆنییەکەی دەکات لە نێوان کاتژمێر یەك 1:00 و کاتژمێر دوو 2:00 ی پاش نیوەڕۆ ئەگەری ئەوەی لە نێوان 1:30 و 1:40 بەو کارە هەستێت چەندە؟

شیکار

بۆشایی نموونە لەهەرساتێکی نێوان کاتژمێر 1:00و 2:00 پێکدێت و ڕووداوەکە لە 1:30 تا 1:40 بۆ هەژمێرکردنی ڕێژەی ئەگەری ئەو ڕووداوە، ماوەی نێوان کاتژمێر 1:00و 2:00 دابەش دەکەیت بۆچەند ماوەیەك کە هەریەکەیان 10 خولەك بێت

(درێژی ماوەی نێوان 1:30 و 1:40 کەڕووداوەکە دەنوێنێت).



ماوە سەوزەکە ڕووداوەکە دەنوێنێت. ئەگەری ڕوودانی ڕووداوەکە، واتا، ماوەیەك لە 6 ماوە واتە:

$$P(E)=\frac{1}{6}=0.167=16.7\%$$

کاتێك E هێمایەك بێت بۆ ڕووداوەکە

(سەیرکردنی شەماڵ بۆ پۆستە ئەلکترۆنییەکەی لە 1:30 بۆ 1:40)

هەوڵبدە ئەگەری ئەوەی لە نێوان 1:30 و 1:35 بەو کارە هەستێت چەندە؟

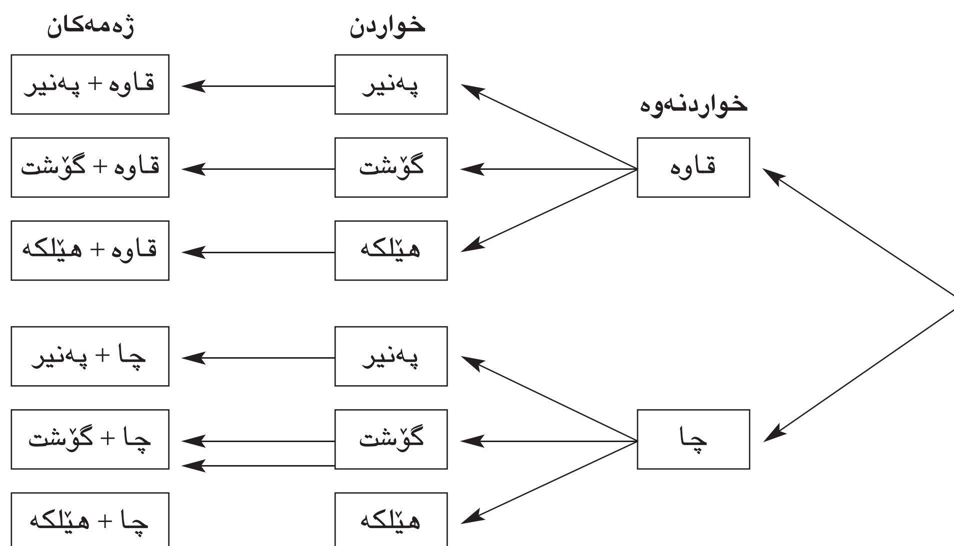
یاسای بنەڕەتی ژماردن Fundamental Counting Principle

کە لە ڕووداوێك دەکۆڵێتەوە بۆ ئەوەی ڕێژەی ئەگەرەکەی هەژمێربکەی پێویستت بەمانە دەبێت:

1. هەموو ئەم ئەنجامانەی کە لە توانادایە بژمێرە (دانەکانی بۆشایی نموونە بنووسە).

2. ئەو ئەنجامانە بژمێرە کە پاسادانی ڕووداوەکە دەکات. دەتوانیت هێڵکاری درەختی بەکاربهێنیت بۆ ئەنجامدانی ئەم کارە.

بۆ نموونە ژەمی خواردنی بەیانی لە یەکێك لە ئوتێلەکاندا، میوانەکە دەتوانێت لە نێوان قاوە وچای یەکێکیان هەڵبژێرێت و لە نێوان سێ جۆری خواردن پەنیر و گۆشت و هێلکەدا یەکێك هەڵبژێریت. ئەم هێڵکارییەی خوارەوە هەموو ڕێگاکانی کە لە توانادا یە بۆ ژەمی خواردنی بەیانی ڕووندەکاتەوە .



چالاكی

Exploring Tree Diagram دۆزینەوەی هێڵكاری درەختی

خواردنگەیەك دوو جۆر خواردنی بۆ میوانەكانی ئامادەكرد بۆ ژەمی ئێوارە هەر ژەمێك پێكهاتبوو لە قاپێك زەڵاتە و قاپێك گۆشت، میوانەكە بۆی هەیە یەك جۆر لەدوو جۆر زەڵاتە هەڵبژێرێت: زەڵاتەی كاهو، زەڵاتەی تەماتە، قاپە گۆشتەكە سێ جۆرە: گۆشتی برژاو، گۆشتی سورەوەكراو، گۆشتی مریشك

زەڵاتەی كاهو
زەڵاتەی تەماتە

1. دەستبكە بەكێشانی هێڵكاری درەختی تێیدا هەڵبژاردنی زەڵاتە روونبكەوە بەم شێوەیە
2. لە دەستپێكردنی هەڵبژاردنی زەڵاتەكەوە هێڵكاری درەختی روونبكەوە بۆ هەڵبژاردنەكانی سێ جۆرە گۆشتەكە.
3. ئەو ژەمانەی كەپێكدەهێنرێت كامانەن؟ ژمارەیان چەندە؟
4. خواردنگەكە ئێستا پیازی برژاو یان سیری برژاو دەخاتە سەر قاپی گۆشتەكە تۆش ئەمە بخەرەسەر هێڵكاری درەختەكە كە رێگا بە ژماردنی ئەم ژەمە خۆراكییانەی كە ئێستا دروستبوون، ئەو ژمارەیە چەندە؟

خاڵی چاودێری

خاڵی چاودێری

هێڵكاریەكی درەختی دروستبكە بۆ نموونەی پێشوو. بەبێ گوێدانە خستنەڕووی خاڵی چوارەم. بە قاپی گۆشت دەستپێبكە وەك هەڵبژاردنی یەكەم. ئایا ئەم گۆڕانكارییە لەریزكردنی دوو هەڵبژاردنەكە كاری كردە سەر گۆڕانی ئەنجامەكان؟
وردبوونەوە لە هێڵكاری درەختی وزانینی رێگای دروستكردنی دەبێتە هۆی روونكردنەوەی یاسای ژماردنی بنەڕەتی.

Fundamental Counting Principle یاسای بنەڕەتی ژماردن

ئەگەر m رێگا بۆ هەڵبژاردنی یەكەم و n رێگا بۆ هەڵبژاردنی دووەم هەبێت ئەوا $m \times n$ رێگا بۆ هەردوو هەڵبژادنەكە بەیەكەوە هەیە.

نموونە 6

جێبەجێكردنەكانی
بژمێر

دانا ویستی وشەی نهێنی تایبەتی چوونە ناو ئینتەرنێت هەڵبژێرێت. ئەم وشەیە پێكدێت لە دوو پیت لە پیتەكانی ئەبجەدی ئینگلیزی بەدوایدا چوار ڕەنووس. دانا دەتوانێ چەند وشەی نهێنی دروستبكات ئەگەر زانیت كەوا ناتوانێت پیتی O و ڕەنووسی سفر بەكاربهێنێت؟(ژمارەی پیتەكانی ئەبجەدی ئینگلیزی 26 پیتە)

شیكار

دانا دەتوانێت هەرپیتێك لە نێوان 25 پیت هەڵبژێرێت و هەر ڕەنووسێك لە نێوان 9 ڕەنووس هەڵبژێرێت. بەجێبەجێكردنی یاسای بنەڕەتی ژماردن ئەمەی خوارەوەمان دەست دەكەوێت ;

	پیتی یەكەم	پیتی دووەم	ڕەنووسی یەكەم	ڕەنووسی دووەم	ڕەنووسی سێیەم	ڕەنووسی چوارەم
ژمارەی وشە نهێنییەكان ←	25 ×	25 ×	9 ×	9 ×	9 ×	9

$$25^2 \times 9^4 = 41\ 00\ 625$$

نموونە 7

تابلۆی ئۆتۆمبێلەکان پێکدێن لە سێ پیت بەدوایدا لە سێ ڕەنووس دێت. ئەگەری ئەوەی پیتەکانی تابلۆی ئۆتۆمبیلەکە پێکبێت لە پیتەکانی یەکەمی ناوی سیانی خۆت بەڕیز (ژمارەی پیتەکانی ئەبجەدی عەرەبی 28 پیتە) چەندە؟

شیکار

دانەکانی بۆشایی نموونەکە:

پیتی یەکەم	پیتی دووەم	پیتی سێیەم	ڕەنووسی یەکەم	ڕەنووسی دووەم	ڕەنووسی سێیەم
28 ×	28 ×	28 ×	10 ×	10 ×	10

ژمارەی تابلۆکانی لەتواناداپە دەبێتە $28^3 \times 10^3 = 21\ 252\ 000$ تابلۆ.

پاشان ژمارەی ئەو تابلۆیانە بدۆزەرەوەکە مەرجەکە دێنێتەدی.

پیتی یەکەم	پیتی دووەم	پیتی سێیەم	ڕەنووسی یەکەم	ڕەنووسی دووەم	ڕەنووسی سێیەم
1 ×	1 ×	1 ×	10 ×	10 ×	10

بەمەش ژمارەی تابلۆکانی مەرجەکە دێننەدی بریتین لە $10^3 = 1\ 000$ تابلۆ.

ئەگەری ئەوەی پیتەکانی تابلۆی ئۆتۆمبێلەکە پێکبێت لە پیتەکانی یەکەمی ناوی سیانیت بەڕیز

بریتییە لە: $\frac{1000}{21\ 952\ 000} = 0.000045$ واتە 45 لە ملیۆنێك.

جێبەجێکردنەکانی

بازرگانی

ڕاهێنان

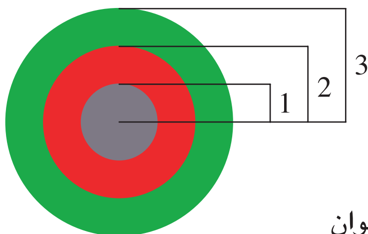
بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1. سێ نموونە لەسەر ڕووداوێك بهێنەوە کە ئەنجامەکانیان وەك یەك نەبن.
2. ئەگەری تیۆری وئەگەری تاقیکردنەوە لە چیدا لێکدەچن؟ لە چیدا جیاوازن؟
3. چۆن ڕووبەرەکان بەکار دەهێنرێت بۆ هەژمارکردنی ئەگەرەکان؟
4. چۆن هێڵکاری درەختی یارمەتیت دەدات بۆ تێگەیشتنی یاسای ژماردنی بنەڕەتی؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو



5. دارا گۆیەکی شوشەیی لە تورەگەیەك ڕاکێشا کە 5 گۆی شین و 3 گۆی سوور و یەك گۆی سپی تێدایە. ئەگەری ئەوەی کە گۆی ڕاکێشراو سوور بێت چەندە؟
6. ڕێژین تیریکی گرتە تابلۆیەکی تەختەی ڕەنگراوی هەڵواسراو لە سەر دیوارێك. ئەگەری ئەوە بدۆزەوە کەتیرەکە لەناوچەی بازنە بچووکەکە بچەقێت؟



7. ئاکام ڕۆژانە سەیری پۆستی ئەلیکترۆنیەکەی دەکات لە نێوان کاتژمێر حەوت و کاتژمێر هەشتی بەیانی. ئەگەری ئەوەی ئەم کارە لە نێوان 7:30 و 7:45 ئەنجام بدات چەندە؟

8 ڕەوەز ویستی وشە نهێنیە تایبەتییەکەی هەڵبژێریت بوچوونە ناو ئینتەرنێتەوە، ئەم وشە پێکدێت لە 3 پیت لە پیتەکانی ئەبجەدی ئینگلیزی و سێ ڕەنووسی بەدوایدا بێت. چەند وشەی نهێنی دەتوانیت پێکبهێنێت، ئەگەر بزانی ناتوانێت پیتی O و ڕەنووسی 0 بەکاربهێنێت.

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

تورەگەیەك 3 پلێتی سپی و دوو پلێتی ڕەش و 5 پلێتی سووری تێدایە هەموویان هاوشێوەن و زانا پلیتێکی ڕاکێشا. ئەگەری ئەو پلیتە ڕاکێشراوە بدۆزەوە بۆ ئەوەی.

9 سپی بێت

10 ڕەش بێت

11 سوور بێت

ئەگەر بەردەزارێك یەك جار هەڵبدرێت ئەگەری ئەم ڕووداوانەی خوارەوە بدۆزەوە.

12 دەستکەوتنی ژمارە 1

13 دەستکەوتنی ژمارە 4 .

14 دەستکەوتنی ژمارەی جووت

15 دەستکەوتنی ژمارەی تاك.

16 دەستکەوتنی ژمارەی بچووکتر لە3 .

17 دەستکەوتنی ژمارەی گەورەتر لە 3 .

18 دەستکەوتنی ژمارەی گەورەتر لە 6 .

19 دەستکەوتنی ژمارەی بچووکتر لە 7 .

پاسی گواستنەوە دەگاتە شوێنی ڕاوەستانی تەنیشت ماڵی دانا لە نێوان کاتژمێر هەشت و 5 خولەکی بەیانی. ئەگەری ئەوەی کە دانا سواری پاسەکە بێت کاتی گەیشتە شوێنی وەستان لەم کاتانەی خوارەوەدا بدۆزەوە.

20 8:04

21 8:02

22 8:01

23 8:03

لە دوو پرسیاری 4224 و 25 هێڵکاری درەختی دروستبکە بۆ ئەوەی بۆشایی نموونەی ڕووداوەکە ڕوونبکاتەوە.

24 تۆمارکرن لە چالاکییەکانی دەرەکییەکان (یەك چالاکی لە هەریەك لە چەشنەکانی (1,2,3

وەرزش : تۆپی پێ، تۆپی سەبەتە، تۆپی سەرمێز.

هونەر : مۆسیقا، وێنە.

یانە : زانست، بیرکاری

25 ئارەزووەکان (خولیاکان) (ئارەزوویەك لە هەر یەکە لە دوو چەشنی A ، B)

لەناوماڵ : خوێندنەوە، سەیرکردنی تەلەفزیۆن، گوێگرتن لە مۆسیقا.

لە دەرەوەی ماڵ: ڕاکردن، گەشتکردن، چوونە یانە.

ژمارەی وشە نهێنیەکان کە دەتوانرێت پێکبهێنرێن بەبەکارهێنانی هەموو پیتەکانی ئەبجەدی ئینگلیزی و هەموو ڕەنووسەکان لە هەریەك لەم بارانەی خوارەوە دیاریبکە.

26 دوو ڕەنووس بەدوایدا سێ پیت و بەدوای ئەوانە یەك ڕەنووس بێت.

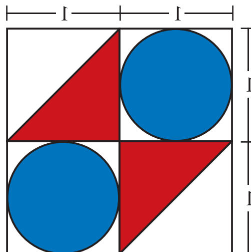
27 سێ ڕەنوس بەدوایدا دوو پیت و بەدوای ئەوان یەك ڕەنووس بێت.

28 سێ پیتی جیاواز بەدوایدا سێ ڕەنووسی جیاواز بێت.

29 دوو پیت بەدوایدا چوار ڕەنووس بێت.

بەستنەوە

ئەندازە کامەران تیرێکی هەڵدا بۆ سەر تابلۆیەکی تەختەیی ڕەنگکراو کەلەم وێنەیەدا ڕوونکراوەتەوە. ئەگەری هەریەك لەم ڕووداوانە هەژمێربکە.



30 تیرەکە ناوچەیەکی بازنەیی بپێکێت.

31 تیرەکە یەکێك لە دوو سێگۆشە سوورەکە بپێکێت.

32 تیرەکە یەکێك لە دوو سێگۆشە سپیەکە بپێکێت.

بەرەنگاری

33 تیرەکە ناوچەیەکی سپی بپێکێت.

جێبەجێکردنەکان

دیمۆگرافیا ئەم خشتەیەی خوارەوە چەند خوێندکارێکی تۆمارکراو لە یەکێك لە کۆلیژەکانی زانکۆیەك بە پێی تەمەن و ڕەگەزیان پێشاندەدات.

هاوڵاتی	هاتووەکان	تەمەن
93	83	14 – 17
1 416	1 224	18 – 19
1 414	1 294	20 – 21
1 263	1 260	22 – 24
1 058	950	25 – 29
811	661	30 – 34
1 824	955	35 و سەروتر

ڕاگری کۆلێژ هەستا بە هەڵبژاردنی یەکێك لە تۆمارکراوەکان. ئەگەری ئەوەی تەمەنی ئەو کەسە لە یەکێك لەم چەشنانە بێت چەندە؟

34 18 – 24 **35** 25 – 29 **36** 30 – 34 **37** 30 بەرەوژوور

38 **ئاسایش** یەکێك لە پسپۆرەکانی ئاسایش ویستی کلیلێك دروستبکات بۆیەکێك لە سیستمەکانی ئاسایش ئەم کلیلە لە سێ پیت پێکدێت C، B، A لە تواناداپە هەریەکێك لەم پیتانە زیاتر لە جارێك دوبارەببێتەوە، ئەو پسپۆرە ویستی ئەگەری سەرکەوتنی هەوڵەکانی کردنەوەی کلیلەکە لە 0.001 کەمتر بێت، کەمترین ژمارەی پیتەکانی ئەو کلیلە دەگاتە چەند؟

ڕوانین بۆ دواوە

پلەی هەریەك لەم ڕادەدارانە چەندە؟

39 $x^3+4x^5-6x^2+x-10$

40 $x+3x^5$

هەریەك لەم هاوكێشە و لاسەنگەیە شیكاربكە.

41 $x^3-2x^2-x+2=0$

42 $x^2-3x+2>0$

جێبەجێكردنەكانی

ئابووری

43 پیشەسازكارێك وایدانا نەخشەی $C(x)=0.1x^2+5x+40$ نموونەیەك بۆ تێچوونی كاڵاكانی پێكدەهێنێت. هێمای x لەم نەخشەیەدا ئاماژەیە بۆ ژمارەی یەكەكانی بەرهەم هێنان و هێمای C بۆ تێچوونی بەرهەمەكەیە. تێچوونی بەرهەمهێنانی 10 كاڵا چەندە؟ لەبارێكی تردا پیشەسازكارەكە بڕیاریدا بەرهەمەكە بفرۆشێت بە 60 هەزار دینار بۆ هەر دانەیەك. دەبێت چەند ژمارە لەو كاڵایانە بفرۆشێت بۆ ئەوەی گەورەترین قازانجی دەستبكەوێت؟

ڕوانین بۆ پێشەوە

44 سامان ویستی دوو پیت لەم پیتانە هەڵبژێرێت E، D، C، B A ژمارەی شیكارەكانی لە توانادا چەندە؟ئەگەر سامان گرنگی بدات بە ڕیزكردن لەكاتی ڕاكێشان (شیكاری B، A وەك شیكاری A، B نیە).

ئەگەر سامان بایەخ نەدات بەڕێزكردن (هەردوو شیكار A، B و B، A هەمان شیكارە).

وانەی 2

گۆڕینەکان و ڕیزکردنەکان

Permutations and Arrangements



بۆچی؟

لێرەدا زۆر بار هەیە بایەخ دەدات بە ڕێکخستنی ژمارەیەک لەدانە دیاریکراوەکانی کۆمەڵەیەک بە شێوەیەکی ڕێزکراو.

ئامانجەکان

- شیکارکردنی ئەو پرسیارانەی کە پێویستی بە گۆڕینەکان هەیە. و دیاریکردنی ژمارەی گۆڕینەکانی کۆمەڵەیەک کە لە n دانە پێکهاتووە دیاردەکات.
- شیکارکردنی ئەو پرسیارانەی کە پێویستیان بە ڕیزکردن هەیە ودیاریکردنی هەموو ڕیزکراوەکانی m دانەیە لە n .

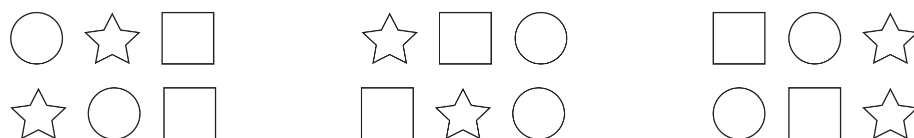
ئەرنۆلد شوینبرگ مۆسیقایەکی داهێنا کە لە 12 ئاواز پێکهاتووە. پێویستە هەر نۆتەیەک لە نۆتەکانی پەیژەی مۆسیقی بە لایەنی کەمەوە یەك جار بەکاربێت، پێش لەرینەوەی هەر یەکێکیان. بەهەر کۆمەڵەیەك لە 12 ئاوازەکە دەوترێت **ئاوازە دێر Tone Row**. چەند ئاوازە دێری جیاواز دەتوانیت بنووسی؟

گۆڕینەکان Permutations

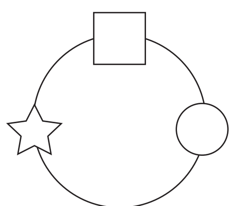
گۆڕین ڕێکخستنی ژمارەیەك شتە لە ڕیزکردنێکی دیاریکراودا.

نموونە 1 هەموو گۆڕینەکانی ئەم شتانە بکێشە ☆ ○ □

شیکار



دەتوانیت شتەکان لە سەر هێڵێك ڕێکخەیت وەك نموونەکەی پێشوو. و دەتوانیت ڕێکیان بخەیت لەسەر بازنەیەك وەك ئەم وێنەیە. ڕێکخستنی شتەکان لە باری یەکەمدا گۆڕینێکی هێڵییە و لەباری دووەمدا گۆڕینێکی بازنەییە.



نموونە 2

شیکارکردنی پرسیارەکان

دروستکردنی لیستی ڕێکخراو: ئەم خشتەی خوارەوە هەموو ئەو گۆڕینانەی لە توانادایە بۆ پیتە لاتینیەکان D، C، B، A ڕوونده‌کاتەوە چۆن یاسای ژماردنی بنچینە بەکاردێنێت بۆ دۆزینەوەی ژمارەی ئەم گۆڕینانە؟

DABC	CABD	BACD	ABCD
DACB	CADB	BADC	ABDC
DBAC	CBAD	BCAD	ACBD
DBCA	CBDA	BCDA	ACDB
DCAB	CDAB	BDAC	ADBC
DCBA	CDBA	BDCA	ADCB

شیکار

دەتوانیت ژمارەی ئەو گۆڕینانە دیاریبکەیت بە بەکارهێنانی یاسای بنەڕەتی ژماردن وەك لە خوارەوە ڕوونکراوەتەوە

دەتوانرێت پیتی یەکەم هەڵبژێریت لە	دەتوانرێت پیتی دووەم هەڵبژێرێت لە	دەتوانرێت پیتی سێیەم هەڵبژێرێت لە	دەتوانرێت پیتی چوارەم هەڵبژێرێت لە
4	3	2	1

ژمارەی گۆڕینەکان بریتییە لە $4\times3\times2\times1=24$ گۆڕین.

بۆ دەربڕینێکی پوختە بۆ ئەم لێکدانە ئەمە: $4!=4\times3\times2\times1=24$ بەکاربێنە

لێکدراوی n n factorial

ئەگەر n ژمارەیەکی تەواوی نا سالیب بێت. ئەوا لێکدراوی n بە $n!$ دەنووسرێت وەدەکاتە:

$$n!=\begin{cases}1 & : \text{کە } n=0\\ 1\times2\times\ldots\times n & : \text{کە } n>0\end{cases}$$

نموونە 3

ڕاستی و دۆستی ورەوەز بەشداریانکرد لە یاری بازداندا، بۆشایی نموونە بۆ ئەم یارییە دیاریبکە؟ژمارەیان چەندە؟ئەگەری ئەوەی ڕەوەز یەکەم بێت چەندە؟

شیکار

ئەو ئەنجامامەی لە توانادایە لەم یارییەدا:

یەکەم	ڕاستی	ڕاستی	دۆستی	دۆستی	ڕەوەز	ڕەوەز
دووەم	دۆستی	ڕەوەز	ڕاستی	ڕەوەز	ڕاستی	دۆستی
سێیەم	ڕەوەز	دۆستی	ڕەوەز	ڕاستی	دۆستی	ڕاستی

ژمارەی ئەنجامەکانی لەتوانادایە دەکاتە 6 .

ژمارەی ئەو ئەنجامانەی کە پاسادانی ڕووداوەکە دەکات (ڕەوەز یەکەم بێت) دووە. ئەگەری ئەوەی کە ڕەوەز یەکەم بێت $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=0.3333=33.33\%$

هەوڵبدە دەتوانیت چەند ژمارەی 4 ڕەنووسی پێکبهێنیت بەبەکارهێنانی ڕەنووسەکانی 1، 2، 3، 4 بەبێ دووبارەبونەوە؟ ئەو ژمارانە بنووسە.

نموونە 4

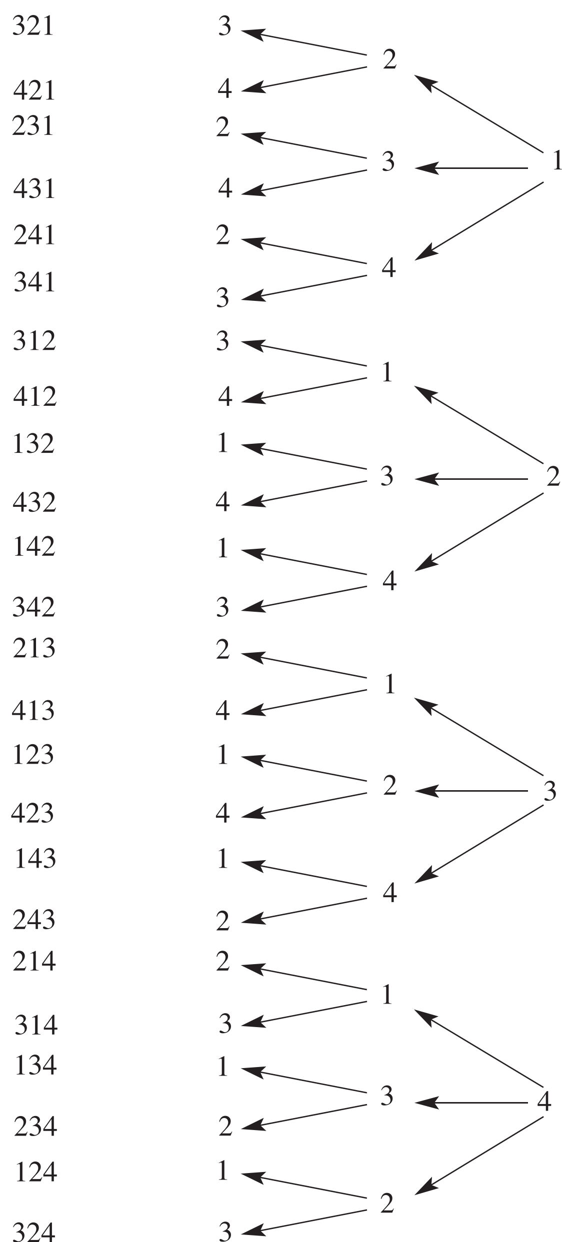
دەتوانیت چەند ژمارەی 3 ڕەنوسی پێکبهێنیت بەبەکارهێنانی ڕەنووسەکانی 1، 2، 3، 4 بەبێ دوبارەبوونەوە؟ ئەو ژمارانە بنووسە؟

شیکار

هێڵکاری درەختی بەکاربهێنە. ئەم هێڵکارییە درەختییەی خوارەوە هەموو ئەو هەڵبژاردنانەی کە لە توانادا هەیە ڕووندەکاتەوە بۆ هەڵبژاردنی ڕەنووسی یەکان لە دواییدا ڕەنووسی دەیان، پاشان ڕەنووسی سەدان. و هەروەها ژمارەکەش دیاریدەکات لەهەر بارێکدا.

دەتوانی 24 ژمارە پێکبهێنیت کە لە 3 ڕەنووس پێکهاتبێت بەبەکارهێنانی ڕەنووسەکانی 1، 2، 3، 4، بەبێ دووبارەبوونەوە

ژمارە | ڕەنووسی سەدان | ڕەنووسی دەیان | ڕەنووسی یەکان



هەوڵبدە دەتوانیت چەند ژمارەی 4 ڕەنووسی پێکبێنیت بەبەکارهێنانی ڕەنووسی1، 2، 3، 4، 5، بەبێ دووبارەبوونەوە؟

ئەوەی پێی هەڵسایت لە نموونەی پێشوو دەتوانین بڵێین 3 ڕەنووست ڕێکخست لە 4 ڕەنووسەکانی 1, 2, 3, 4 ئەوەی تۆ دەستتکەوت بریتییە لە ریزکردنەکانی 3 شت لە 4 شتی بنەڕەتی، بۆ دەستکەوتنی ژمارەی ئەم ریزکردنانە یاسای ژماردنی بنەڕەتی بەکاربێنە.

دەتوانرێ ڕەنووسی یەکان هەڵبژێری لە		دەتوانرێ ڕەنووسی دەیان هەڵبژێری لە		دەتوانرێ ڕەنووسی سەدان هەڵبژێری لە
4	×	3	×	2

بەمەش ژمارەی ڕیزکردنەکان دەبێتە $4 \times 3 \times 2 = 24$.

نموونە 5

جێبەجێکردنەکانی مۆسیقا

باوکی ئالآن 10 C.D موسیقای بە دیاری دایە کوڕەکەی. ئالآن ویستی گوێ لە سێیانیان بگرێت یەك لەدوای یەك. ئایا ئالان چەند هەڵبژاردنی هەیە؟



شیکار

ئالآن دەتوانێ پەپکی یەکەم هەڵبژێرێت لە 10 پەپك، دووەم لە 9 پەپك، و سێیەم لە 8 پەپك. ئەگەر ئالآن یاسای ژماردنی بنەڕەتی بەکاربهێنێت دەبینێت کە: $10 \times 9 \times 8 = 720$ هەڵبژاردنی هەیە.

هەوڵبدە شێرزاد 5 ڕۆمانی کری بۆ ئەوەی سێیانیان بخوێنێتەوە یەك بەدوای یەك لە پشووی هاویندا. شێرزاد بەچەند ڕێگا دەتوانێت ئەم کارە ئەنجام بدات؟

Arrangements of *n* Objects Taken *r* at a Times ژمارەی ریزکردنەکانی *r* شت لە *n* شتی بنەڕەتی

ژمارەی ریزکردنەکانی r شت لە n شتی بنەڕەتی کاتی $r \le n$ بریتییە لە $P(n, r) = {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

نموونە 6

شیلان ویستی 4 پەرتووك لە کتێبخانەکەیدا دابنێ کە لە 10 ڕەفە پێکهاتبوو بەمەرجێك لە یەك کتێب زیاتر لە ڕەفەیەکدا دانەنێت. شیلان بە چەند ڕێگا دەتوانێت ئەم کارە ئەنجام بدات.

شیکار

پرسیارەکە دەگەڕێتەوە بۆ ریزکردنی 4 ڕەفە لە بنەڕەتی 10 .شیلان ڕەفەی یەکەم لە 10 ،و دووەم لە 9 ، و سێیەم لە 8 ، و چوارەم لە 7 هەڵدەبژێرێت بەمەش ژمارەی ڕێگاکان دەبێتە $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$.

هەوڵبدە ئاکام 8 قوتووی ڕەنووسکراو و 5 گۆی ڕەنگاوڕەنگی جیاوازی هەیە. ویستی گۆیەکان بخاتە ناو چەند قوتوویەکەوە بەمەرجێك لە گۆیەك زیاتر لە قوتوویەکدا نەبێت. چەند ڕێگای هەیە؟

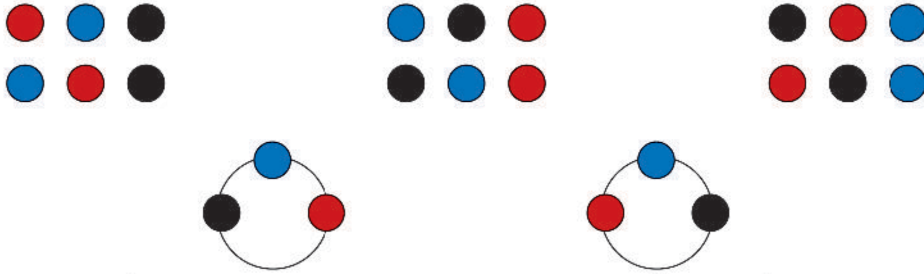
Circular Permutations گۆڕینەکانی بازنەیی

نموونە 7

لە باخچەکەی ڕووناکدا 3 کورسی هەیە: شین وسوور و ڕەش. ڕووناك ویستی ئەو کورسییانە بەریز لە دەوری مێزێکی بازنەیی دابنێ **چەند ڕێگای هەیە؟ ژمارەیان چەندە؟**

شیکار

ئەگەر سەرنجی گۆڕینە هێڵییەکانی سێ کورسیەکە بدەیت ئەمەی خوارەوەت دەستدەکەوێت



تێبینی بکە کە گۆڕینە هێڵییەکان لە ڕیزی یەکەمدا (شین، سوور، ڕەش) یەك گۆڕینی بازنەیی پێکهێناوە. و گۆڕینەکان لە ریزی دووەم (شین، ڕەش، سوور) یەك گۆڕینی بازنەیی پێکهێناوە.
کەواتە ڕووناك دوو ڕێگای هەیە بۆ دانانی کورسیەکان بە دەوری مێزەکەدا.

هەوڵبدە چەند ڕێگات هەیە بۆ ڕیزکردنی 4 جۆر لە خواردنی سورەوەکراو لە قاپێکی بازنەییدا؟

ڕاهێنـــــــان

بەردەوامبوون لەبیرکاریدا

1 چۆن یاسای بنەڕەتی ژماردن یارمەتیت دەدات بۆ دیاریکردنی ژمارەی گۆڕینەکان بۆ چوار شت؟

2 چۆن یاسای ژماردنی بنەڕەتی یارمەتی دەدات بۆ دیاریکردنی ژمارەی ڕێزکردنەکانی چوار شت لە بنەڕەتی پێنج شت؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

3 چەند ژمارە دەتوانی بنووسی بەبەکارهێنانی شەش ڕەنووس بەبێ دووبارەبونەوە؟

4 چەند ڕێگات هەیە بۆ بینینی 3 شریتی ڤیدیۆ یەك بەدوای یەك لە بنەڕەتی حەوت شریت؟

5 چەند ڕێگا هەیە بۆ دانشتنی 12 کەس دابنیشێت بەدەوری مێزێکی بازنەیی بۆ خواردنی نانی ئێوارە.

هەژمێربکە

6 $7! - 5$ **7** $6! - 4!$ **8** $(7-5)!$ **9** $(6-4)!$

10 $\frac{8!}{5! \times 3!}$ **11** $\frac{10!}{4! \times 6!}$ **12** $\frac{0! \times 5!}{(4-1)!}$ **13** $\frac{3! \times (7-2)!}{0!}$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ناز 8 ڕەنووسی هەیە دەتوانێت، چەند ژمارە پێکبهێنێت بە، بەکارهێنانی ڕەنووسەکان بەبێ دووبارەبونەوە لەم بارانەی خوارەوەدا.

14 لە 5 ڕەنووس **15** لە 3 ڕەنووس **16** لە 4 ڕەنووس

17 لە 6 ڕەنووس **18** لە یەك ڕەنووس **19** لە 8 ڕەنووس

جێبەجێکردنەکان

کارگێری دەزگاکان یەکێك لە کۆمپانیاکان پێشوازی لە 8 کارمەندی تازەکرد. ژمارەی ڕێگاکانی دابەشکردنیان بەسەر پۆستەبەتاڵەکان دیاریبکە لە هەر بارێك لەم بارانەدا:

X<¤Ä 15 **23** X<¤Ä 10 **22** X<¤Ä 9 **21** X<¤Ä 8 **20**

24 vJ¦eθî ñ\<\ì †UJ! g|U/ ËU"\Ù ÈWJK|ËUÇ ñ¤3 7 v¶fi|Ë WJK|ËUÇ vJ¦ñUOÅËdã
ÊUOïœdëe|ğ ¤! W|WÙ U~¦ğ bïWÇ v|Wï"U!

25 7 Wì †UJ§|ñU|œ „W|…ñUî¸ vïUë…bïWîñUë Wì p¦bïWîñUë ñWÙ ¤! v¶fi|Ë ÊUëUOïUáî¤ë Wì pθëW|
ñWÙ Èdï«u"…œ vï«e! ñWÖWz ¨W|«œUï«u" Wì Wë…bïWÇ ÊUëW"UNJθÄ È…ñUî¸ v§"UNJθÄ ” Ëuï…ğ
ø…ËWïËu!…ñU!ËËœ v! …bïWÇ ÊU|…ñUî¸ ÈdMθN!ñUëW! 9 U" dH< vïUëW<Ëuï…ğ …œ

26 X¦d~!¤8 Wì 3 U" 1vïUëW<Ëuï…ğ Wë †UJ! X<Ëñœ ñ«bKθî vJθ8ñWÇ v¶fi|Ë ñUÖ"ñ
øW<Ëuï…ğ v< ËWz vMθ<Ëuï ¤! W|WÙ ÈU~¦ğ bïWÇ ÊUfiëW| vÅW! 3 W! œdë ÈWëW8ñWÇ

Ë«b|dθ

WïU|U~¦ğ ËWz È…ñUî¸ X¦dï…œ ËUï vïUë…ñW< vïUëW¶θÄ vïUMθÙñUëW!W! ôbïWÇ ñU3 ñË" …"«bïWz
ƒWïU¶θÄ ÂWz vMθN!ñUëW! W! vOM!ËUï …Ë…ñ«u8 ÈWïU|ôbïWÇ ÂWì „W|ô bïWÇ Èdï«u"…œ Wë WJ§|ñU|œ
A, B, C, D, E, F

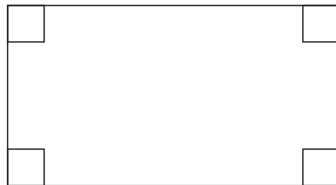
ÈœJθ3W§θ3

ö°MθÄ **30** öÅWÅ **29** ôñ«uÇ **28** WÅ¤~θ< **27**

31 …bïWÇ ÊUë…Ë«d! vïUëWïœdëe|ğ È…ñUî¸ «bJθïœdë«ğ Wì œdë ÊU|ñ«bÅW! ZïWÖ 7 ‘ "ñ…Ë
ø©ÂW| v< ¨Â…ËËœ ¨ÂWëW|®

…Ë«Ëœ ¤! 5ï«Ëğ

32 v|WAθëô vJθï¤"ñUë WÇñUÄ W˜üuÖ ÊUëUÙW! ÈğWÄËWz
v¶fi|Ë 36cm ÈWëWOθïUÄ ¨48cm ÈWëW|ó¦ñœ W|WÙ
ñW<Wì X0! …Ëdë …Ë…ñW< Wì †UJ§¶<Ëñœ vì vëW|Ëu"uè
Wì „Ëuâ! ÈWÅ¤Öñ«uÇ 4 vM|d!W! V|ñW" WAθëô È…uθÅ
Èó|ñœ …ËWï«dMθ¶Åuï ÊUëW|ô «b0|«Ëœ Wì ¨«b|Wë…ñW< ñ«uÇ
È…ËWz ¤! ¨X0! bïWÇ X0!…œ WëWÅuÖñ«uÇ ÈWë…Ë«d!ô
øX0!WÙ È…ñU!Wè s|d"…ñËWÖ Wë…Ëu"uè



33 pθëW| W!ñ«œUÖUz ® WJ! ñUJθÅ WO|…ËWJθÄ W|WAθëËUÙ ËËœ ÂWz
©WOï v˙θÙ ÈWAθëËUÙ ÊUëWAθëËUÙ Wì

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ 3x - y = -11 \end{cases}$$

ËWAθÄ ¤! 5ï«Ëğ

34 bïWÇ ñW<W! ÊœJθÅW!«œ WëWïu8 ÈñW‹J¦ğ ¨œdë ÊU0|ñ«bÅW! «bθÄ vÅ¤" vJθïu8 Wì WïU| 6
øXθMθN§JθÄ X0ï«u"…œ W˜Wîuë bïWÇ Ëu§"UNJθÄ WïU| ËËœ Wì „W|W˜Wîuë ñWÙ «bëW|W˜Wîuë

گونجێنەکان

Combinations

وانەی 3

ئامانجەکان

- ئەو پرسیارانە شیکار دەکات کە گونجێنی تێدایە. هەموو گونجێنەکانی r دانە لە n دانە دیاریدەکات.
- ئەو پرسیارانە شیکاردەکات کە پەیوەندی نێوان گۆڕین و گونجێنی تێدایە.



بۆچی؟

گونجێنەکان ڕۆڵێکی گرنگی هەیە لە ژیاندا. بۆ نموونە ڕێگا دەدات بە هەژمارکردنی ژمارەی ئەو تیپانەی پێکدێت لە 3 خوێندکار لە خوێندکارەکانی پۆلی دەیەم.

لەبیرت بێت کە ڕیزکردن بریتییە لە ڕێکخستنی r شت لە بنەڕەتی n شت لە ڕیزکردنێکی دیاریکراودا. ئەگەر لە ڕێکخستنەکەدا هیچ گرنگیەك نەدرا بەڕیزکردن. ئەوەی دەستمان دەکەوێت پێی دەڵێین گونجێن. گونجێنی r دانە لە بنەڕەتی n دانە بریتییە لە کۆمەڵەیەك کە پێکدێت لە r دانە لە بنەڕەتی n دانە.

ئەگەر ئەم ژمارانەت هەبێت، 1، 2، 3، 4، 5، ژمارەکانی 2، 3، 5 گونجێنی 3 دانە لە بنەڕەتی 5دانە پێکدێنێت. سەرنجبدە کە ژمارەکانی 3، 2، 5 هەمان گونجێن پێکدێنێت بە پێچەوانەی ڕیزکردنەکەوە.

نموونە 1

یانەیەکی وەرزشی هەڵبژاردنێکی نهێنی سازدا بو هەڵبژاردنی لیژنەیەکی کارگێڕی کە پێکدێت لە سەرۆك و یاریدەدەری سەرۆك و ڕازگر و بەرپرسی دارایی و بەرپرسی پەیوەندییەکان. لە نێوان 7 پاڵێوراودا. بۆ وەرگرتنی لیژنەی کارگێڕی یانەکە، چەند لیژنە دەتوانرێ پێکبهێنرێت؟

جێبەجێکردنەکانی

وەرزش

هەڵبژاردنی سەرۆك لە	هەڵبژاردنی یاریدەدەری سەرۆك لە	هەڵبژاردنی ڕازگر لە	هەڵبژاردنی بەرپرسی دارایی لە	هەڵبژاردنی بەرپرسی پەیوەندیەکان لە
7 ×	6 ×	5 ×	4 ×	3

$$7\times6\times5\times4\times3=\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1}=\frac{7!}{2!}=\frac{7!}{(7-5)!}=2520$$

نموونە 2

یانە وەرزشییەکە ڕێگای هەڵبژاردنی لیژنەی کارگێڕی گۆڕی بەمەرجێك هەر ئەندامێك لە ئەندامەکان بۆی هەبێت 5 هەڵبژێراو لە حەوت هەڵبژێرێت، بۆ دروستبوونی لیژنەی کارگێڕی بێ دیاریکردنی کاری هەریەکەیان، بۆئەوەی ئەندامانی لیژنە هەڵبژێراوەکە خۆیان کارەکان دابەشبکەن.

شیکاری پرسیارەکان

أ بەچەند ڕێگا دەتوانرێ پێنج ئەندامە هەڵبژێراوەکە لەنێوان خۆیاندا کارەکانیان دابەشبکەن؟

ب چەند لیژنەی سەرپەرشتی ئەندامەکان دەتوان پێکیبهێنن بەرێگای هەڵبژاردنە تازەکە.

شیکار

أ ژمارەی ڕێگاکان بریتییە لە ژمارەی گۆڕینەکانی کۆمەڵەی 5 دانەییەکە کە دەکاتە

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$

ب یاسای ژماردنی بنەڕەتی بەکاربێنە

ژمارەی لیژنە پێکهاتوەکان = ژمارەی لیژنە هەڵبژێراوەکان × ژمارەی گۆڕینەکانی هەموو

لیژنەکە 2520 = ژمارەی لیژنە هەڵبژێراوەکان × 120

ژمارەی لیژنەکان کەدەتوانین هەڵیانبژێرین. $\frac{2520}{120} = 21$ واتا 21 لیژنە.

چالاکی

بەراوردکردنی ڕیزکردنەکان و گونجێنەکان Comparing Arrangements and Combinations

یەکێك لە یانەکان یارییەکی سازکرد لە نێوان ئەندامەکانی بەم شێوەیەی خوارەوە.

- یاریکەر 3 ڕەنووس لە دە ڕەنووس (لە 0 تا 9) هەڵدەبژێرێت و لەسەر بۆردەکە دەینووسێت.
- یاریکەر 3 گۆی ڕەنووسکراو لە 0 تا 9 لە تورەگەیەك ڕادەکێشێت یەك لەدواییەك.
- بۆ ئەوەی یاریکەرەکە بباباتەوە پێویستە ڕەنووسە نووسراوەکان لەسەر بۆردەکە بەهەمان ڕیز ڕابکێشێت.

1. ئارار ڕەنووسەکانی 8، 4، 1 ی هەڵبژارد یەکبەدواییەك. ئەو ئەنجامانەی کە دەبنە هۆی بردنەوەی چین؟
2. ڕێکخەری یارییەکە ڕێساکەی گۆڕی بۆ ئەوەی یاریکەرەکە بباتەوە مەرجی دانا، ئەویش بە ڕاکێشانی سێ ڕەنووسەکە بەبێ بایەخدان بەریزکردن.ئارار یاریەکەی دووبارەکردەوە و سوور بوو لەسەر ڕەنووسەکانی خۆی، ئەو ئەنجامانە چین کە دەبێتە هۆی بردنەوەی؟
3. کام دوو یاری گەورەترین بەختیان هەیە بۆ یاریکەرەکە: یەکەم یان دووەم؟هۆی وەڵامەکەت دیاریبکە.

خاڵی چاودێری ✔

گونجێنی *r* شت لە بنەڕەتی *n* شت Combinations of *n* Objects Taken *r* at a Time

ژمارەی گونجێنەکانی r شت لە بنەڕەتی n شت کاتێك $r \le n$ بریتییە لە $C(n, r) = {}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

بەرەنگاری پەیوەندی نێوان ${}_nP_r$، ${}_nC_r$ چییە؟

نمـــوونـــه 3

ئاكام پێویستە 3 پەرداخ لە 5 پەرداخ هەڵبژێرێت كە ئاوی ئەم میوانەی تێدایە: لیمۆ، سێو، ترێ، مۆز، ئەناناس. چەند ڕێگای هەیە بۆ ئەم كردارە؟

جێبەجێكردنەكانی

بازرگانی

شیكار

دەتوانی پەرداخی یەكەم لە 5 پەرداخ و دووەم لە 4 پەرداخ و سێیەم لە 3 پەرداخ هەڵدەبژێرێت. بەڵام هەڵبژاردنی ئاوی لیمۆ و ئاوی مۆز و ئاوی ترێ هیچ جیاوازیەكی نییە لە هەڵبژاردنی ئاوی مۆز و ئاوی ترێ و ئاوی لیمۆ. واتە ڕیزكردن هیچ بایەخێكی نییە لێرەدا ئەمە ئەوە دەگەیەنێت كە ژمارەی ئەو ڕێگایانەی لەبەردەم ئاكام دایە بریتییە لە ڕیزكردنی 3 لە 5 دابەشبێت لەسەر گۆڕینی 3 شت واتە:

$$\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=\frac{5!}{(5-3)!}\div3!=\frac{5!}{3!\,(5-3)!}=10$$

هەوڵبدە

ئاكام چەند هەڵبژاردنی هەیە ئەگەر وا پێویست بوو 4 پەرداخ هەڵبژێرێت؟

هزرێكی ڕەخنەگرانە

كامیان گەورەترە: ژمارەی ڕیزكردنی 3 لە 5 یان ژمارەی گونجێنەكانی 3 لە 5 ؟

لە دوو نموونەكەی پێشوو ئەوەمان دەستدەكەوێت كە پەیوەندیەك هەیە لە نێوان ژمارەی ڕیزەیەتی r شت لە بنەڕەتی n شت و ژمارەی گونجێنی r شت لە بنەڕەتی n شت.

پەیوەندی لە نیوان ڕیزكردنەكان و گونجێنەكاندا

Relation Between Arrangements and Combinations

ژمارەی ڕیزكردنەكان r شت لە بنەڕەتی n شت = ژمارەی گونجێنەكانی r شت لە بنەڕەتی n شت × ژمارەی ڕیزكردنەكان r شت.

نمـــوونـــه 4

لە شیكاركردنی پرسیارێكدا، زۆر جار پێویستیمان بە هەڵبژاردنی شێوازێكی گونجاو دەبێت: ڕیزكردنەكان یان گونجێن.

شێوازێكی گونجاو دیاریبكە بۆ هەریەك لەمانەو لە دواییدا ژمارەكانی هەژمێربكە.

أ چەند ڕێگا هەیە بۆ هەڵبژاردنی سەرۆك و یاریدەدەری سەرۆك و ڕازگر لە 5 هەڵبژێراو؟

ب چەند ڕێگا هەیە بۆ هەڵبژاردنی لێژنەیەكی 3 ئەندامی لە 5 هەڵبژێراو.

شیكار

أ شێوازەكە لێرەدا شێوازی ڕیزكردنەكانە. چونكە داواكراو هەڵبژاردنی كەسێكە بۆ سەرۆك و ئەوی تریان بۆ یاریدەدەری سەرۆك و سێیەمیان بۆ ڕازگر. $\frac{5!}{(5-3)!}=5\times4\times3=60$

ب شێوازەكە لێرەدا شێوازی گونجێنەكانە چونكە داواكراو كۆمەڵەیەكە لە 3 كەس پێكهاتووە.ژمارەی ڕێگاكان $_5C_3=\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\,(5-3)!}=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$

هەوڵبدە

چەند ڕێگا هەیە بۆ هەڵبژاردنی لێژنەیەكی دوو كەسی لە نێوان 7 كەسدا؟ چەند ڕێگا هەیە بۆ هەڵبژاردنی سەرۆك و یاریدەدەر لە ئەندامەكانی لیژنەیەك كە لە 7 كەس پێكهاتووە؟

بەكارهێنانی گونجێنەكان لەهەژمێركردنی ئەگەرەكان
Using Combinations in Probability

نمـــوونـــه 5

گێلاس دوو گۆی لە تورەگەیەك ڕاكێشا 5 گۆی سوور و 3 گۆی شینی تێدابوو، ئەگەری ئەوەی دوو گۆ ڕاكێشراوەكە سووربن چەندە؟

شیكار

ئەم ئەگەرە یەكسانە بەڕێژەی ژمارەی ئەو بارانەی كەدوو گۆیە ڕاكێشراوەكە سوور بن بۆ ژمارەی

دانەکانی کۆمەڵەی ئەنجام (بۆشایی نموونە). ژمارەی یەکەم ژمارەی گونجێنی 2 بۆ 5 ودووەم ژمارەی گونجێنی 2 بۆ 8. ژمارەی یەکەم $_5C_2 = \binom{5}{2} = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$، ژمارەی دووەم $_8C_2 = \frac{8\times7}{2\times1} = 28$ ئەگەری ئەوەی دوو گۆیەکە سوور بن.

$$\frac{10}{28} = 0.3\,571 = 35.71\%$$

هەوڵبدە ئەگەری ئەوەی دوو گۆیەکە دوو ڕەنگی جیاواز بن چەندە؟

ڕاهێـــــنـــان

بەردەوامبوون لەبیرکاریدا

1 جیاوازی نێوان ڕیزکردنەکان و گونجێنەکان ڕوونبکەوە. بەنموونەیەك زیاتر ڕوونیبکەوە.

2 پەیوەندی چییە لە نێوان ریزکردنی 5 لە بنەڕەتی 7 و گونجێنی 5 لە بنەڕەتی 7؟ئەو پەیوەندیە بنووسە. و ژمارەی گونجێنی 5 لە بنەڕەتی 7 هەژمێربکە؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

3 چەند ڕێگا دەکرێت سەرۆك و یاریدەدەری سەرۆك و ڕازگر لە نێوان ئەندامەکانی لیژنەیەکی 6 کەسی هەڵبژێردرێت؟

4 چەند ڕێگا دەکرێت 3 پەرتووك و 4 شریتی مۆسیقا لە هاوڕێیەکت کە 9 پەرتووك و 7 شریتی هەبێت وەربگری؟

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئەمانە هەژمێربکە:

5 $_7C_4$ 6 $_8C_4$ 7 $_{10}C_7$ 8 $_9C_5$

9 $_9C_1$ 10 $_{11}C_1$ 11 $_{15}C_{15}$ 12 $_{12}C_{12}$

13 $\frac{6!}{2!\times4!}\times\frac{5!}{4!\times1!}$ 14 $\frac{4!}{3!\times1!}\times\frac{9!}{4!\times5!}$ 15 $\frac{_6C_5\times{}_{15}C_2}{_{21}C_7}$ 16 $\frac{_{14}C_5\times{}_9C_7}{_{23}C_{12}}$

چەند لیژنە دەتوانرێ پێکبهێنرێت لە هەر یەکێك لەم بارانەی خوارەوەدا.

17 3 ئەندام لە 5 پاڵێوراو 18 7 ئەندام لە 8 پاڵێوراو

19 8 ئەندام لە 12 پاڵێوراو 20 6 ئەندام لە 10 پاڵێوراو

تورەگەیەك 5 گۆی سپی و 3 گۆی سەوزی تێدایە ئەگەری ئەم ڕاکێشانانە چین؟

21 دوو گۆی جیاواز لە ڕەنگدا. 22 3 گۆ دووانیان سەوز و سێیەم سپی بێت

23 4 گۆ دووانیان سپی و دووانیان سەوز بن **24** 5 گۆ سێیان سەوز ودووانیان سپی بێت.

لە پرسیاری 25-28 ڕێگای شیکاری هەریەك لەم بارانە دیاریبکە. «ڕیزکردن یان گونجێن».

25 هەڵبژاردنی 4 پەرتووك بۆ بڵاوکردنەوە لە بنەڕەتی کۆمەڵە پەرتووکێك کە ژمارەیان 302 پەرتووکە.

26 هەڵبژاردنی 9 یاریکەر لە15 یاریکەر بۆ پێکهێنانی تیپێکی سەبەتە.

27 هەڵبژاردنی چوار پاڵێوراو لە 200 بۆ وەرگرتنی پاداشت لە 100 هەزار دینار و 200 هەزار دینار و 500 هەزار دینار، و ملیۆنێك دینار.

28 هەڵبژاردنی سەرۆك و یاریدەدەری سەرۆك بۆ سەندیکایەك کە 100 ئەندامی تێدایە.

جێبەجێکردنەکان

29 **پزیشکی** لە توێژینەوەیەکی نەخۆشییەکانی دڵدا. یەکێك لە توێژەرەوەکان سامپڵێکی هەڵبژارد لە 5 کەس لە نێوان 10 کەس کە وەرزشی ڕاکردنیان ئەنجامدەدا. و15کەس ئەم وەرزشەیان نەدەکرد.

أ ژمارەی ئەو پێکهاتانەی لەتوانادایە چەندە؟

ب ژمارەی ئەو پێکهاتانەی پێکدێت لە 3 کەس لەوانەی ئەو وەرزشە دەکەن چەندە؟

ج ئەگەری ئەوەی لە نێوان ئەو پێنج پێکهاتانە تەنها 3 یان ئەم وەرزشە بکەن چەندە؟



ڕوانین بۆ دواوە

ئەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

30 $\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}$ **31** $\frac{2}{x(x-2)}-\frac{x}{x^2-4}$

ئەم هاوکیشانە شیکاربکە:

32 $\sqrt{x+4}=2$

33 $\sqrt{x-1}=3\sqrt{x-2}$

34 $\sqrt{-x}=4\sqrt{-x-2}$

ڕوانین بۆ پێشەوە

35 بەمەبەستی ناونانی ئەندامەکانی نوسینگەی یانەی بروسك. 5 ناو بە تیروپشك ڕاکێشرا لە نێوان ناوی 8 پاڵێوراو کە پێکهاتبوو لە 8 ئەندامی شەرەف و 22 ئەندامی کارا.

أ ئەگەری ئەوەی پێنج ناوەکە ئەندامانی شەرەف بن چەندە؟

ب ئەگەری ئەوەی 4 ناو لە پێنج ناوەکە ئەندامەکانی شەرەف بن چەندە؟

ج ئەگەری ئەوەی لە نێوان پێنج ناوەکە 3 ناویان بەلایەنی کەمەوە ئەندامانی شەرەف بن چەندە؟

وانەی
4

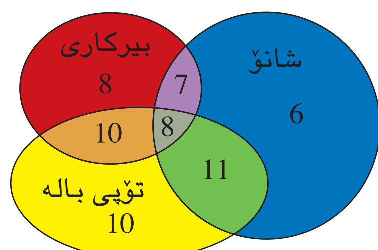
کۆکردنەوەی ئەگەرەکان
Adding Probabilities



بۆچی؟
دەتوانیت کرداری کۆکردنەوە بەکاربهێنێت بۆ هەژمێرکردنی ئەگەری ڕووداني دوو ڕووداو یان زیاتر.

ئامانجەکان
- ئەگەری دووڕووداوی جیا هەژماردەکات.
- ئەگەری دوو ڕووداو جیانەبن هەژماردەکات.
- ئەگەری دژە ڕووداو هەژماردەکات.

جێبەجێکردنەکان
بۆ خۆشی



لە ئامادەیی ڕزگاریدا سێ جۆر یانە هەیە. یانەی شانۆ لە 32 ئەندام پێکهاتووە و یانەی بیرکاری لە 33 ئەندام پێکهاتووە ویانەی تۆپی باڵە لە 39 ئەندام پێکهاتووە. هەندێ لە خوێندکاران سەر بەیانەیەك زیاترن هەروەك لەم هێڵکاریەی بەرامبەرت ڕوونکراوەتەوە بەڕێوەبەر یەکێك لە ئەندامەکانی یانەکانی بەشێوەیەکی ڕەمەکی هەڵبژارد. ئەگەری ئەوەی ئەو خوێندکارە ئەندام بێت بە لایەکی کەمەوە لە دوو یانە چەندە؟ هەندێ

لە ڕووداوەکان جیان ئەگەر یەکێکیان ڕوویدا ئەوا ئەوانی تر ڕوونادەن. ئەگەر زارێك هەڵبدەین ئەو دوو ڕووداوی (دەستکەوتنی ژمارەی تاك) و (دەستکەوتنی ژمارەی جووت) دوو ڕووداوی جیان.

بەپێچەوانەی ئەوە دوو ڕووداوی (دەستکەوتنی ژمارەی جووت) و (دەستکەوتنی ژمارەی کەمتر لە 3)دوو ڕوداوی جیانین چونکە دەستکەوتنی 2 پاسادانی هەردوو ڕووداوکە بەیەکەوە دەکات.

چالاكی

دۆزینەوەی ئەگەری ڕووداني دوو ڕووداو — Exploring Two-Events Probability

لەمەودوا پێویستیت بە دوو بەردەزاری ڕەنگاوڕەنگی جیاواز دەبێت.

1. خشتەی خوارەوە بنووسەوە پاشان تەواوی بکە. بەهەڵدانی دوو بەردەزار 10 جار. لەگەڵ وەرگرتنی ئەو دوو ژمارەیەی لەسەر هەردوو ڕووی سەرەوەی دوو بەردەزارەکە دەردەکەوێت.

هەڵدان	بەردەزاری یەکەم	بەردەزاری دووەم	سەرجەم	ئەنجامی لێکدان
1				
2				
3				
⋮				

2. ئەم خشتەیەی بەرامبەرت تەواوبکە بەسوود وەرگرتن لە خشتەی نموونەی یەکەم و ئەگەری ڕوودانی هەر ڕووداوێك لەم ڕوودانە ڕوونبکەوە.

	أ	ب	ج
$P(A)$			
$P(B)$			
$P(A \cup B)$			
$P(A)+P(B)$			

أ لەم بارەدا A : «ڕووداوێکە ژمارەی 6 لەسەر ڕووی زاری یەکەم دەرکەوێت» و B «ڕووداوێکە ژمارە 3 لەسەر ڕووی زاری یەکەم دەردەکەوێت».

ب لەم بارەدا A :«ڕووداویکە. لەسەر ڕووی زاری یەکەم 6 دەرکەوێت» و B : «ڕووداوێکە کۆی ژمارەی سەر هەردوو زارەکە 7 بێت».

ج لەم بارەدا A لەسەر ڕووی زاری یەکەم ئەو ژمارەیەی دەرکەوت بچوکترە لە 5 و B ڕووداوێکە (ئەنجامی لێکدانی دوو ژمارەی سەر دوو زارەکە گەورەترە لە 5).

3. بە پشت بەستن بەو ئەنجامانەی دەستتکەوتووە ئایا $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ؟ لە چ بارێکدا ئەم پەیوەندیە ڕاستە؟

خاڵی چاودێری

بۆ ئەوەی زیاتر هەستبکەیت بە ئاشکرایی جیاوازی نێوان ڕووداوە جیاکان و ڕووداوە ناجیاکان سەرەنجی ئەمانەی خوارەوە بدە.

دوو ڕووداوی جیا

A = دەستکەوتنی ژمارەی جووت

$P(A) = \frac{3}{6}$

B = دەستکەوتنی ژمارە 3

$P(B) = \frac{1}{6}$

بڕوانە $A \cap B = \varnothing$ وە $P(A \cap B) = 0$

$P(A \cup B) = \frac{4}{6}$

لەبەرئەوەی دوو ڕووداوەکە جیان. ئەگەری ڕووداوی $A \cup B$ یەکسانە بە کۆی ئەگەری هەردوو ڕووداوەکە

$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

دوو ڕووداوی ناجیا

A = دەستکەوتنی ژمارەی جووت

$P(A) = \frac{3}{6}$

C = دەستکەوتنی ژمارە 4

$P(C) = \frac{1}{6}$

بڕوانە $A \cap B \neq \varnothing$ ، $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$P(A \cup C) = \frac{3}{6}$

لەبەرئەوەی دوو ڕووداوەکە جیانین.پێویستە ئەگەری ڕووداوی $A \cap C$ لە کۆی ئەگەری دوو ڕووداوەکە دەربکەین.

$P(A \cup C) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ئەگەری ڕووداوی A یان B — **Probability of A or B**

A ، B دوو ڕووداوی هەمان تاقیکردنەوەی ڕەمەکین

ئەگەر A و B جیابن ئەوا: $P(A \text{ یان } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

ئەگەر A و B جیانەبن ئەوا: $P(A \text{ یان } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

خاڵی چاودێری

کام لە دوو ڕێسایەی پێشوو بۆ هەموو بارەکان بەکاردێت؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

نموونە 1

جێبەجێکردن
ئامار

لە ڕاپرسییەکدا بۆ ڕای گشتی لەبارەی نوێکردنەوەی شێوازە پەروەردەییەکان. نموونەیەك کە لە 100 هاوڵاتی پێکهاتبون پرسیاریان ئاراستەکرا. ئەم خشتەیەی بەرامبەرت ئەنجامی ئەم ڕاپرسییە ڕووندەکاتەوە

	نێر	مێ	سەرجەم
لەگەڵ	18	9	27
دژ	12	25	37
بێ ڕا	20	16	36
سەرجەم	50	50	100

یەکێك لەوانەی ڕاپرسییەکەیان ئاراستەکردبوو وبەشێوەیەکی هەڕەمەکی هەڵبژێرا. ئەگەری ئەوەی ئەو هاوڵاتییە دژی نوێخوازیی بێت یان هیچ ڕایەکی نەبێت چەندە؟

شیکار

هەردوو ڕووداوی (دژ) و (بێڕا) دوو ڕوداوی جیان. لێرەدا ئەوەی هەمانە

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{37}{100} + \frac{36}{100} = \frac{73}{100} = 73\%$$

نموونە 2

ئەگەری ئەوەی ئەو کەسەی هەڵبژێراوە بە هەڕەمەکی نێربێت یان لەوانە بێت کە دژی نوێخوازی بێت چەندە؟

شیکار

هەردوو ڕووداوی (نێر) و (دژ) دوو ڕووداوی جیانین

$P($نێر یان دژ$) = P($نێر$) + P($دژ$) - P($نێر و دژ$)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{50}{100} + \frac{37}{100} - \frac{12}{100} = \frac{75}{100} = 75\%$$

هەوڵبدە ئەگەری ئەوەی ئەو کەسەی هەڵبژێراوە بە هەڕەمەکی مێ بێت یان لەوانەبێت کە (بێڕا)ن چەندە؟

دژە ڕووداو Probability of an Event

ئەگەر بگەڕێینەوە بۆ نموونەکەی پێشوو. دوو ڕووداوی (دژ) و (لەگەڵ یان بێڕا) تەنها دوو ڕووداوی جیانین. بەڵکو ڕوونەدانی یەکێکیان واتە ڕوودانی ئەوی تریان لەم بارەدا هەریەکێکیان دژی ئەوەی تریانە **Complement**. بەشێوەیەکی گشتی: دەڵێین ڕووداوی B دژی ڕووداوی A دەبێت کاتێك دوو ڕووداوەکە جیابن ویەکێکیان بە دڵنیاییەوە ڕووبدات.

ئەگەری دژە (تەواوکەری) ڕووداو Probability of the Complement

ئەگەر ڕووداوی B دژە ڕووداوی A بێت ئەوا.

$P(A) = 1 - P(B) \qquad P(B) = 1 - P(A) \qquad P(A) + P(B) = 1$

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە ئەو هۆیە چییە کە ڕێگات پێدەدات بە نووسینی $P(A) + P(B) = 1$ کاتێك دوو ڕووداوی A و B تەواوکەری یەکترین.

نموونە 3

جێبەجێکردنەکان
بۆ خۆشی

بە گەڕانەوە بۆ ئەو پرسیارەی کە لە سەرەتای وانەدا باسکرا. ئەگەری ئەوەی ئەو خوێندکارەی بەهەڕەمەکی هەڵبژێرا ئەندام بێت بەلایەنی کەمەوە لە دوو یانەدا چەندە؟

شیکار

ڕووداوی (ئەندام لە یەك یانەدا) تەواوکەری ڕووداوی (ئەندام بەلایەنی کەمەوە لە دوو یانەدا).

کەواتە p (ئەندام تەنیا لەیەك یانە) = 1 − p (ئەندام لە دوو یانەدا بەلایەکی کەمەوە)

$$P(A) = 1 - P(B) = 1 - \frac{6+8+10}{60} = \frac{36}{60} = 0.6 = 60\%$$

هەوڵبدە ئەگەری ئەوەی ئەو خوێندکارەی بەڕەمەکی هەڵبژێرا ئەندام بێت لە دوو یانەدا چەندە؟

ڕاهێـــــــنـــــــان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1 نموونەیەك بێنەوە بۆ دوو ڕووداوی جیا، ویەکێکی تر بۆ دوو ڕووداوکە جیانەبن.

2 تەواوکەری ڕووداوی ئەم ڕووداوە چییە: «دەستکەوتنی 1 یان 2 » لە کاتی هەڵدانی بەردەزارێکدا

3 چۆن ئەگەری ئەم ڕووداوە هەژمێردەکەیت: « دەستکەوتنی ژمارەی تاك یان 3 » لە هەڵدانی بەردەزارێکدا؟

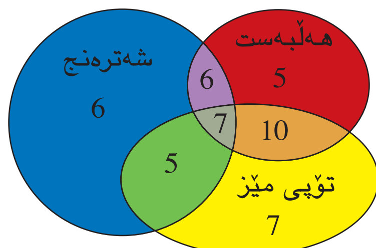
ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەنجامەکانی ڕاپرسی بۆ نویکردنەوەی شێوازی پەروردەیی بکاربهێنە بۆ شیکارکردنی هەردوو پرسیاری 4 و5 .

4 ئەگەری ئەو کەسەی بەڕەمەکی هەڵبژێرا ڕای هەبێت چەندە ؟

5 ئەگەری ئەوەی ئەو کەسەی بە هەرەمەکی هەڵبژێرا نێر بێت یان لەوانە نەبێت کە لەگەڵ نوێخوازی بێت چەندە ؟

6 لە دواناوەندییەکدا سێ یانە هەیە: یانەی شەترەنج 24 ئەندامی هەیە و یانەی تۆپی سەرمێز 29 ئەندامی هەیە و یانەی هەڵبەست 28 ئەندامی هەیە، هەندێ لە خوێندکارەکان سەربەیانەیەك زیاترن. هەروەك لەم هێڵکارییەی بەرامبەردا ڕوونکراوەتەوە. بەڕێوەبەر ئەندامێکی ئەم یانەی بەڕەمەکی هەڵبژارد. ئەگەری ئەوەی ئەو خوێندکارە بەلایەنی زۆرەوە ئەندام بێت لە دوو یانەدا چەندە؟



ڕاهێنان و جێبەجێکردن

هەلۆ بەردەزارێکی هەڵدا. ئەگەری دەستکەوتنی ئەم ڕوداوانە چەندە؟

7 5 یان 6 ؟
8 1 یان 4 ؟
9 ژمارەی جووت یان3 ؟
10 ژمارەی تاك یان 2 ؟
11 1 یان ژمارەیەك بچوکتر لە 4؟
12 6 یان ژمارەیەك گەورەتر لە 2 ؟
13 ژمارەیەك بێجگە لە یەك؟
14 ژمارەیەك جووت نەبێت؟
15 ژمارەیەکی جووت یان تاك؟

جێبەجێکردنەکان

ئەم خشتەیە ئەنجامەکانی هەڵدانی دوو بەردەزار ڕوونەدکاتەوە. لە پرسیاری 16 تا 18 خشتەکە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی ئەوەی کە دوو ڕووداوەکە جیان، و بۆ دۆزینەوە ئەگەری ڕووداوە ئاوێتەکە.

(6 ؛1)	(5 ؛1)	(4 ؛1)	(3 ؛1)	(2 ؛1)	(1 ؛1)
(6 ؛2)	(5 ؛2)	(4 ؛2)	(3 ؛2)	(2 ؛2)	(1 ؛2)
(6 ؛3)	(5 ؛3)	(4 ؛3)	(3 ؛3)	(2 ؛3)	(1 ؛3)
(6 ؛4)	(5 ؛4)	(4 ؛4)	(3 ؛4)	(2 ؛4)	(1 ؛4)
(6 ؛5)	(5 ؛5)	(4 ؛5)	(3 ؛5)	(2 ؛5)	(1 ؛5)
(6 ؛6)	(5 ؛6)	(4 ؛6)	(3 ؛6)	(2 ؛6)	(1 ؛6)

16 دەستكەوتنی سەرجەمێك یەكسان بێت بە 2 یان دەستكەوتنی سەرجەمێك یەكسان بێت بە 4 .

17 دەستكەوتنی سەرجەمێك گەورەتربێت لە 2 یان دەستكەوتنی سەرجەمی گەورەتربێت لە 6 .

18 دەستكەوتنی سەرجەمێك بچوكتربێت لە 3 یان دەستكەوتنی سەرجەمێك بچوكتربێت لە 10 .

19 چەند ژمارەی تەواو لە 1 تا 600 هەیە كە توانای دابەشبوونی هەیە بەسەر 2 یان 3 دا ؟ ئەگەری ئەوەی ئەو ژمارەی كە بە هەڕەمەكی هەڵبژێراوە لە نێوان 1 تا 600 و توانای دابەشبوونی نیە بەسەر 2 و 3 دا چەندە؟

20 چەند ژمارەی تەواو لە 1 تا 3 500 هەیە كە توانای دابەشبوونی هەیە بەسەر 5 یان 7 دا ؟ ئەگەری ئەوەی ئەو ژمارەی بە هەڕەمەكی هەڵبژێراوە لە نێوان 1 تا 3 500 و توانای دابەشبوونی نەبێت بەسەر 5 و 7 دا چەندە؟

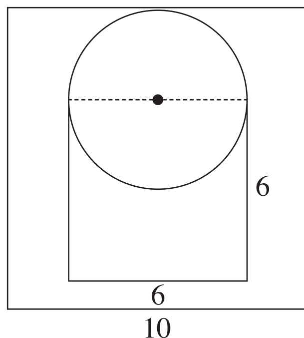
لە پرسیاری 21–26 ئەگەری تەواوكەری ڕووداوی هەریەك لەم ئەگەرانەی خوارەوە بدۆزەوە.

21 $\frac{1}{3}$ 22 $\frac{4}{11}$ 23 0.782

24 0.324   25 0   26 1

بەستنەوە

ئەندازە ئالان تیرەكەی بۆ سەر چوارگۆشە گەورەكە هەڵدا. ئەگەری ئەوەی ئەو تیرە كە هەریەك لەمانەی خوارەوە بپێكێت چەندە.



27 بازنەكە؟

28 چوارگۆشە بچووكەكە؟

29 چوارگۆشە بچووكەكە بە مەرجێك ئەو بەشەی تێدانەبێت كە هاوبەشە لەگەڵ بازنەكە؟

30 ناوچەی هاوبەش لە نێوان بازنە و چوارگۆشە بچووكەكە یان بازنەكە؟

31 چوارگۆشە بچووكەكە یان بازنەكە؟

جێبەجێكردن

32 **چاودێری جۆری** سندوقێك 35 پارچەی یەدەگی ئۆتۆمبیلی تێدایە، 8 پارچەیان باش نییە، یەكێك لە پشكێنەرانی فەرمانگەی چاودێری جۆری هەستا بەوەرگرتنی 5 پارچە بۆ پشكنینیان. ئەگەری ئەوەی یەكێك لەم پارچانە باش نەبێت چەندە؟

ڕوانین بۆ دواوە

ئەمانە بەرێگای ڕوونكردنەوە شیكاربكە لە ڕووتەختی پۆتانیدا.

33 $3 < x < 8$ 34 $-14 \le x \le -2$ 35 $-1 < y < 3$

ئەم برانە شیتەڵبكە.

36 $x^2 - x - 42$ 37 $3x^2 - 16x - 12$ 38 $81x^2 + 18x + 1$

ڕوانین بۆ پێشەوە

39 تورەگەیەك4 گۆی سووری تێدایە ڕەنوسكراون لە 1 تا 4 و 4 گۆی شینی تێدایە ڕەنوسكراون لە 1 تا 4 ، و 4 گۆی سەوزی ڕەنووسكراو لە 1 تا 4. ڕزگار گۆیەكی ڕاكێشا ئەگەری ئەوەی گۆیەكە ژمارە 1 هەڵگربێت چەندە؟ ڕزگار گۆیەكەی گەڕاندەوە بۆ تورەگەكە. ئەم جارەیان گۆیەكی تری ڕاكێشا سوور بوو. ئایا گۆڕانكاری بەسەر ئەگەری ئەوەی كە گۆیەكە هەڵگری ژمارەی 1 بێت چەندە؟ وەڵامەكەت ڕوونبكەرەوە.

ڕووداوە سەربەخۆییەکان

Independent Events

وانەی 5

ئامانجەکان

- هەژمێری ئەگەری ڕوودانی دوو ڕووداوی سەربەخۆ یان زیاتر دەکات



بۆچی؟ دەتوانیت یاسای ئەگەری دووڕووداوی سەربەخۆ بەکاربهێنێت بۆ دۆزینەوەی گەلێك لە ئەگەرە گرنگەکان. نموونە بۆ ئەوە ئەگەری ئەوەی کە دوو خوێندکار لە پۆلێکدا لەیەك ڕۆژدا لە دایك بووبن.

پۆلی دەیەم 35 خوێندکار دەگرێتەوە، ئەگەری ئەوەی دوو خوێندکار لەوانە بەلایەنی کەمەوە لەیەك مانگ ولە یەك ڕۆژدا لە دایك بووبن چەندە!

بۆ ئەوەی وەڵامی ئەم پرسیارە بدەیتەوە، پێویستە بزانیت چۆن جیاوازی دەکەیت لە نێوان ڕووداوە سەربەخۆیەکان و ڕووداوە بەیەکبەستراوەکان و چۆن هەژمێری ئەگەری ڕوودانی دوو ڕووداوی سەربەخۆ دەکەیت. ئەمەت لەم چالاکییەی خوارەوە بۆ ڕووندەبێتەوە.

چالاکی

دۆزینەوەی ڕووداوە سەربەخۆیەکان Exploring Independent Events

کامەران پارچە دراوێکی کانزایی و بەردەزارێکی هەڵدا.

1. هێمای A دابنێ بۆ ڕووداو: « دەستکەوتنی شێر » لەکاتی هەڵدانی پارچە پارەکە، ئەگەری ئەم ڕووداوە چەندە $P(A)$ ؟ ×
2. هێمای C دابنێ بۆ ڕوداوی: « دەستکەوتنی ژمارە 3 » لەکاتی هەڵدانی زارەکە ئەگەری ئەم ڕووداوە چەندە $P(C)$ ؟
3. ئایا ڕوودانی یەکێك لەو دوو ڕووداوە کاردەکاتە سەر ڕوودانی ئەوی تریان؟هۆیەکەی دیاریبکە.
4. بەشێوەی جووتە ڕێکخراو ئەنجامی هەڵدانی پارچە پارە کانزاییەکە و زارەکە بەیەکەوە بنووسە. بۆ نموونە $(A, 3)$ ئەگەر کامەران شێر و ژمارەی 3 دەستکەوت. لیستێك پێکبهێنە کە هەموو ئەنجامەکانی لە توانادا هەیە لە هەڵدانی پارچە پارەکە و زارەکە. هەژمێری ئەگەری ڕوودانی هەردوو ڕووداوی A و C بەیەکەوە بکە واتا $P(A)\times P(C)$.
5. هەژمێری $P(A)\times P(C)$ بکە. ئایا $P(A\cap C)$ یەکسانە بە $P(A) \times p(C)$.
6. هێمای D دابنێ بۆ ڕووداوی: « دەستکەوتنی ژمارەی جووت » لە کاتی هەڵدانی زارەکە $P(D)$ بدۆزەرەوە $P(A\cap D)$.
7. $P(A\cap D)$ بدۆزەرەوە بەبەکارهێنانی ئەو لیستەی کە دروستتکردووە لە پرسیاری 4 دا. ئایا $P(A\cap D)$ یەکسانە بە $P(A)\times P(D)$ ؟
8. چیت دەست دەکەوێت لە ئەگەری ڕوودانی دوو ڕووداو بەیەکەوە. ئەگەر ڕوودانی یەکێکیان کارنەکاتە سەر ڕوودانی ئەوی تریان؟

خاڵی چاودێری ✓

بە زۆر ڕووداو دەوترێت سەربەخۆن **Independent**. ئەگەر ڕوودانی یەکێکیان یان ڕوونەدانی کارنەکاتە سەر ڕوودانی ڕووداوەکانی تر. نموونە بۆ ئەوە هەڵدانی دوو بەردەزار. بەزۆر ڕووداو دەوترێت بەیەکبەستراو **Dependent** ئەگەر ڕوودانی یەکێکیان یان ڕوونەدانی کاربکاتە سەر ڕوودانی ڕووداوەکەی تر یان ڕووداوەکانی تر.

ئەگەری دوو ڕووداوی سەربەخۆ Probability of Independent Events

دوو ڕووداوی A و B سەربەخۆ دەبن تەنها ئەگەر $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ و دوو ڕووداوەکە **بەیەکبەستراو** دەبن لە بارەکانی تردا.

نموونە 1

خونچە دوو تورەگەی هەبوو یەکێکیان 9 گۆی سوورو 3 گۆی سەوزی تێدابوو و ئەوی تریان 9 گۆی ڕەش و 6 گۆی زەردی تێدابوو. خونچە گۆیەکی لەهەر تورەگەیەك ڕاکێشا. ئەگەری ئەوەی گۆیە ڕاکێشراوەکە لە تورەگەی یەکەمدا سەوز بێت و گۆیە ڕاکێشراوەکە لە تورەگەی دووەمدا ڕەش بێت چەندە.

شیکار

تورەگەی یەکەم

$P(G) = \frac{3}{3+9} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

کاتێك G ڕووداوی «گۆی سەوز» بێت

تورەگەی دووەم

$P(B) = \frac{9}{6+9} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

کاتێك G ڕووداوی «گۆی ڕەش» بێت

لەبەر ئەوەی دوو ڕوداوەکە سەربەخۆن

$$P(G \cap B) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$$

ئەگەری ئەوەی گۆی ڕاکێشراو لە تورەگەی یەکەم سەوز و لە تورەگەی دووەم ڕەش بێت بریتییە لە $\frac{3}{20} = 0.15 = 15\%$

نموونە 2

خوێندکارەکانی هەر یەکە لە هۆبەکانی A و B لە پۆلی دەیەم نوێنەرێکیان بۆ خۆیان هەڵبژارد بەناوی ئەوانەوە لە ئاهەنگی کۆتاییساڵی خوێندن قسەبکات. دانا لە هۆبەی A کەژمارەیان 18 خوێندکار بوو و زانا لەهۆبەی B کە ژمارەیان 20 خوێندکارە بوو. ئەگەری ئەوەی ئەم دووانە نوێنەربن چەندە؟

شیکار

گریمان M هێمابێت بۆ ڕووداوی (دانا نوێنەربێت) و هێمای T کەزانا نوێنەربێت.

$P(M) = \frac{1}{18} \qquad P(T) = \frac{1}{20}$

لەبەر ئەوەی هەردوو ڕووداوی Mو T سەربەخۆن ئەوا.

$$P(M \cap T) = P(M) \times P(T) = \frac{1}{18} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{360} \approx 0.03\%$$

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە

یاسای ئەگەری دوو ڕووداوی سەربەخۆ دەتوانیت گشتگیری بکەیت بۆ ئەوەی ژمارەیەکی زۆر ڕووداوی سەربەخۆ بگرێتەخۆ ئەگەری دەستکەوتنی ژمارەی جووت لە هەڵدانی بەردەزارێکدا سێ جار بەیەك بەدواییەك بریتیە لە $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

ئەگەری ئەوەی 4 شێرت دەستکەوێت لە هەڵدانی پارچە پارەیەکی کانزایی 4 جاری یەك بەدواییەك، چەندە، یاسایەك بنووسە بۆ هەژمێرکردنی ئەگەری ڕوودانی n ڕووداو بەیەکەوە کاتێك ئم ڕوداوانە سەربەخۆ بن.

نموونــــــه 3

جێبەجێکردنەکان
بۆخۆشی

بەگەڕانەوە بۆ پرسیارەکەی سەرەتای وانەکە، کرا ئەگەری ئەوەی کە دوو خوێندکارەکە بەلایەنی کەمەوە لە یەك مانگ و لە یەك ڕۆژدا لە دایك بووبن لە نێوان کۆمەڵە 5 خوێندکاردا چەندە؟

شیکار

لە گۆشەیەکی جیاوازەوە. سەیری کارەکە بکە دژە ڕووداو بەکاربهێنە. وا دابنێ کە لە پۆلەکەدا دوو خوێندکار نییە کە لەیەك مانگ ویەك ڕۆژدا لە دایك بوون. وای دابنێ کە ساڵەکە 365 ڕۆژە.

لەوانەیە ڕۆژی لە دایکبوونی یەکەم هەر ڕۆژێك بێت لە ڕۆژەکانی ساڵ $\frac{365}{365}$.

لەوانەیە ڕۆژی لە دایکبوونی دووەم هەر ڕۆژێك بێت لە 364 ڕۆژدا $\frac{364}{365}$.

لەوانەیە ڕۆژی لە دایکبوونی سێیەم هەر ڕۆژێك بێت لە 363 ڕۆژدا $\frac{363}{365}$.

بەم شێوەیە بەردەوام دەبێت هەتا خوێندکاری چوارەم و پێنجەم $\frac{362}{365}$ ، $\frac{361}{365}$.

$$P(\overline{B}) = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times \frac{361}{365} \approx 0.97$$

یاسای ئەگەری دژە ڕووداو بەکاربێنە بۆ هەژمێرکردنی ئەگەری ئەوەی کە دوو خوێندکارەکە بەلایەنی کەمەوە لە یەك مانگ و یەك ڕۆژدا لە دایك بووبن.

(دوو خوینندکار لە هەمان مانگ و ڕۆژ لە دایك بووبن بەلایەنی کەم دوو خویندکار لە) = 1 − P(هەمان مانگ و ڕۆژ لە دایکبووبن)P .

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0.97 = 0.03 = 3\%$$

کەواتە، ئەگەری ئەوەی کە دوو خوێندکار بەلای کەمەوە هەمان ڕۆژی لەدایکبوونیان هەبێت نزیکەی 3% .

هەوڵبدە ئەگەری ئەوەی دوو خوێندکار بەلای کەمەوە لەیەك مانگ ولەیەك ڕۆژدا لە دایك بووبن لە نێوان 7 خوێندکاردا چەندە؟

ڕاهێنـــــــــان

بەردەوامبوون لەبیرکاریدا

1 نموونەیەك بهێنەوە لەسەر دوو ڕووداوی سەربەخۆ و نموونەیەکی تر لەسەر دوو ڕووداوی بەیەکبەستراو؟

2 چۆن ئەگەری ڕوودانی دوو ڕووداوی سەربەخۆ بەیەکەوە ئەژمێر دەکەیت؟

3 جیاوازی چییە لە نێوان دوو ڕووداوی جیا و دوو ڕووداوی سەربەخۆ. نموونە بۆئەمانە بهێنەرەوە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

4 دارا دوو تورەگەی هەیە یەکەمیان 5 گۆی ڕەش و 5 گۆی سپی تێدایە. دووەمیان گۆیەکی سەوز دوو و گۆی سووری تێدایە. دارا گۆیەکی لە هەر تورەگەیەك ڕاکێشا ئەگەری ئەوەی گۆیە ڕاکێشراوەکە لە تورەگەی یەکەم ڕەش بێت و لە تورەگەی دووەم سەوزبێت چەندە؟

5 خوێندکارەکانی هەردوو هۆبەی A و B پۆلی دەیەم هەریەکەیان نوێنەرێکی هەڵبژارد کە بە ناویانەوە قسەبکات لە ئاهەنگی کۆتایی ساڵی خوێندندا. تارین لە هۆبەی A هەڵبژێرا کە ژمارەیان 22 خوێندکارە وزارا لە هۆبەی B هەڵبژێرا کە ژمارەیان 19 خوێندکارە. ئەگەری ئەوەی هەردووکیان نوێنەر بن چەندە؟

6 یانەیەکی هەڵبەست لە دواناوەندییەکدا 40 ئەندامی هەیە. ئەگەری ئەوەی بەلایەنی کەمەوە دوو خوێندکار لە ئەندامەکانی یانەکە لە یەك مانگ و لە یەك ڕۆژدا لە دایك بووبن چەندە؟

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ڕووداوەکانی A, B, C, D سەربەخۆن $P(D)=0.1, P(C)=0.75, P(B)=0.25, P(A)=0.5$ ئەمانە هەژمێربکە.

7 $P(A \cap B)$ 8 $P(A \cap C)$ 9 $P(C \cap B)$

10 $P(C \cap D)$ 11 $P(A \cap D)$ 12 $P(B \cap D)$

لە کاتی هەڵدانی بەردەزاریێکدا ئایا ئەم دوو ڕووداوانەی خوارەوە سەربەخۆن یان بەیەکبەستراون.

13 «دەستکەوتنی ژمارەی جووت»؛«دەستکەوتنی ژمارەی 2 یان 4 ».

14 «دەستکەوتنی ژمارەی جووت»؛«دەستکەوتنی ژمارەی 1 یان 4 ».

15 «دەستکەوتنی ژمارەی 6 »؛ «دەستکەوتنی ژمارەیەك کەلە 5 بچووکتربێت ».

16 «دەستکەوتنی ژمارەی 4 »؛ «دەستکەوتنی ژمارەیەك لە 3 گەورەتربێت ».

سەیری ئەم چەرخە میلدارەی بەرامبەرت بکە. کاتێك هەشت پارچەکەی لە ڕووبەردا یەکسان بن و چەرخەکە ژمارەکانی 1 تا 8 هەڵگرتووە.ئەگەری هەر ڕووداوێك لەم ڕووداوانەی خوارەوە بدۆزەرەوە لە کاتی جوولانی چەرخەکە سێ جار.

17 میلەکە لە هەر جارێکدا لە بەردەم ژمارە 3 یان لە بەردەم ئەو ژمارەی لە 5 گەورەترە ڕابوەستێت.



18 میلەکە لە هەر جارێکدا لە بەردەم ژمارە 4 یان لە بەردەم ئەو ژمارەی لە 6 بچووکترە ڕابوەستێت.

19 میلەکە لە هەر جارێکدا لە بەردەم ژمارە 5 یان لە بەردەم ئەو ژمارەی لە 7 بچووکترە ڕابوەستێت.

20 میلەکە یەك جار لە بەردەم ژمارە 8 یان لە بەردەم ئەو ژمارەی لە 3 گەورەترە ڕابوەستێت.

21 ئەگەری ئامادەبوونی کامەران لە ئاهەنگێکدا 80% بێت و ئەگەری ئامادەبوونی هەڵۆ 95% بێت ئەگەری ئامادەبوونی هەردووکیان پێکەوە چەندە، ئەگەربزانیت ئامادەبوونی یەکێکیان کارناکاتە سەر ئامادبوون و نەبوونی ئەویتریان.

22 تورەگەیەك 15 گۆی ڕەنوس کراوی لە 1 تا 15 تێدایە، باوان گۆیەکی ڕاکێشا لە دواییدا گەراندییەوە بۆ تورەگەکە، پاشان گۆیەکی بۆ جاری دووەم ڕاکێشا.

أ ئەگەری ئەوەی ئەو گۆیەی کە باوان ڕایکێشا لە هەردوو جاردا ژمارە 8 بێت چەندە؟

ب ئەگەری ئەوەی ئەو گۆیەی کە باوان رایکێشاوە ژمارەی 8 بێت لەیەك جاردا چەندە؟ (یارمەتی: ئەژمێری ئەگەری ئەوەی ئەو گۆیەی ژمارە 8 بێت لە یەکەم جاردا ڕاکیشرابێ یا لە دووەم جاردا نەك لە هەردوو جاردا بەیەکەوە)

23 **فرۆکەوانی** تۆمارەکانی یەکێك لە کۆمپانیاکانی فرۆکەوانی پێشانی دەدات کە گەشتەکەیان لە تاران بۆ هەولێر کە لە کاتی خۆیدا دەگات لە 92% ی گەشتەکانیانە. گەشتەکەیان لەهەولێرەوە بۆ عەمان دەردەچێت لە کاتی خۆیدا لە 97% گەشتەکانە. ئاشتی ویستی گەشتێك بکات لە تارانەوە بۆ عەمان بەمەرجێك بە هەولێردا بڕوات، ئەگەری ئەوەی فرۆکەکەی دەیگوازێتەوە بۆ هەولێر لە کاتی خۆیدا بێت چەندە لە دوایدا بگاتە عەمان لەکاتی خۆیدا؟

ڕوانین بۆ دواوە

ئەگەر x ، y سفر نەبن. ئەم بڕانەی خوارەوە بە سادەترین شێوە بنووسە.

24 $(x^{-2}y^{3})^{2}(3xy^{0})^{3}$

25 $(2x^{2}y^{-2})^{-3}(-x^{2}y)^{3}$

26 $\left(\dfrac{3x^{2}y^{-2}}{5x^{2}y}\right)^{2}$

ڕوانین بۆ پێشەوە

27 نیاز 3 پارچە دراوی کانزایی هاوشێوەی هەڵدا. ئەگەری دەستکەوتنی 3 خەت لە هەر بارێك لەم بارانەی خوارەوە بدۆزەرەوە.

أ بـاری یەکەم: یەکێك لە ڕووەکانی هەریەك لە پارچەکان شێربێت. (هەرسێ پارچە پارەکە ئاسایی بن)

ب یەك لە پارچەکان شێر لەسەر هەردوو ڕووەکەی هەبێت. (دوو پارچەکەی تر ئاسایی بن).

ج دوو لە پارچەکان شێر لەسەر هەردوو ڕووەکەی هەبێت. (پارچە پارەی سێیەم ئاسایی بێت).

وانەی 6

پێوەرەکانی پەرتبوون

Measurments of Dispersion





بۆچی؟

دەتوانیت پێوەرەکانی پەرتبوون بەکاربهێنیت بۆ بەراوردکردنی دوو کۆمەڵە پێدراوی هاوشێوە وەک تێکرای مانگانە بۆ پلەکانی گەرما لە دوو شاردا.

ئامانجەکان

- پێوەرەکانی پەرتبوون وەک مەودا لادانی ناوەندی و لیکنەچوون و لادانی پێوانەیی هەژمێردەکات وبەکاریان دەهێنێت.

Dispersion Concept — چەمکی پەرتبوون

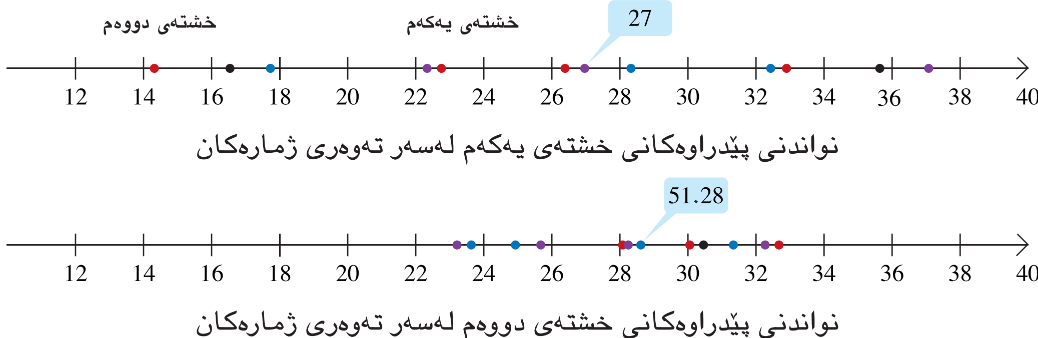
جێبەجێکردنەکان

کەش و هەوا

ئەم خشتەی بەرامبەرت تێکرای پلەکانی گەرما لە 12 مانگدا ڕوونەدکاتەوە لە هەردوو شاری ریاز و جدە. ناوەندی پلەکانی گەرما لە خشتەی یەکەمدا دەگاتە 27 بەڵام لە خشتەی دووەمدا ناوەندی پلەکانی گەرما دەکاتە 28.51، ئەگەر بەهاکانی دوو خشتەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان دابنێین دەبینین:

ناوەندی پلەکانی گەرما لە شاری ریاز.	
کانوونی دووەم	16.63
شوبات	17.8
ئازار	22.94
نیسان	26.37
مایس	32.61
حزیران	35.62
تموز	37.06
ئاب	36.81
ئەیلول	33.06
تشرینی یەکەم	28.34
تشرینی دووەم	22.5
کانونی یەکەم	14.35

ناوەندی پلەکانی گەرما لە شاری جەدە.	
کانوونی دووەم	23.32
شوبات	23.77
ئازار	25.8
نیسان	28.08
مایس	30.51
حزیران	31.25
تموز	32.7
ئاب	32.25
ئەیلول	31.27
تشرینی یەکەم	30.1
تشرینی دووەم	28.2
کانونی یەکەم	24.9



نواندنی پێدراوەکانی خشتەی یەکەم لەسەر تەوەری ژمارەکان

نواندنی پێدراوەکانی خشتەی دووەم لەسەر تەوەری ژمارەکان

ناوەندی خشتەی دووەم (28.51) پلەکانی گەرما دەردەبڕێ لە شاری جدە بە شێوەیەکی باشتر لە دەربڕینی

تێکرای خشتەی یەکەم (27) کە پلەکانی گەرما لە شاری ڕیاز ە. پلەکانی گەرما لە جدە نزیکە لە ناوەندەکەی بە پێچەوانەی پلەکانی گەرما لە شاری ڕیاز. ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت کە دەتوانین بڵێین کە کۆمەڵەی بەهاکانی خشتەی یەکەم پەرتبوونەکەی زیاترە لە بەهاکانی خشتەی دووەم.

پێوەرەکانی پەرت بوون — Measures of Dispresion

ئامارناسان هەندێ لە پێوەرەکان بەکاردەهێنن بودەربڕینی پێوانی مەودای پەرتبونی کۆمەڵە بەهایەك.

مەودا Range : بریتییە لە جیاوازی نیوان گەورەترین بەها **Maximum Value** – وبچووکترین بەها **Minimum Value** لە کۆمەڵەکە. (مەودا = گەورەترین بەها – بچووکترین بەها)

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە

ئایا وادەبینی کە مەودا پەرتبوونی کۆمەڵە بەهایەك دەردەبڕێ؟

لادانی ناوەندی Mean Deviation : بریتییە لە تێکرای دووركەوتنەوەی کۆمەڵە بەهایەك لە ناوەندە کە. (لادانی ناوەندی) = $\frac{1}{n}\left(|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+\ldots+|x_n-\bar{x}|\right)$

بۆ ئەوەی لادانی نێوانەیی هەژماربکەین بۆ کۆمەڵەی بەهای $x_1, x_2 ..., x_n$ لادانی هەریەکیان دەدۆزینەوە لە ناوەندە ژمێرییەکەوە واتە $|x_1-\bar{x}|, |x_2-\bar{x}|, \ldots, |x_n-\bar{x}|$ پاشان تێکرای ئەو لادانانە دەدۆزینەوە.

$$\text{لادانی نێوانەیی} = \frac{1}{n}\left(|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+\ldots+|x_n-\bar{x}|\right)$$

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە

بۆچی ئامار ناسان بری $|x_n-\bar{x}|$ بەکاردێن بۆ دۆزینەوەی لادانی بەهای x_n و لە ناوەندە ژمێری و $x_n-\bar{x}$ بەکارناهێنن لە جیاتی ئەو.

نموونە 1

جێبەجێکردنەکان
بازرگانی

یەکێك لە کۆمپانیاکان تایە بۆ ئۆتۆمۆبیلەکان دروست دەکات، 5 تاقیکردنەوەی ئەنجامدا لە سەر دوو چەشنی تایە.ژمارەی ئەو کیلۆمەترانەی تۆمارکرا کە هەر تایەك بڕیویەتی پێش ئەوەی لە کەلك بکەوێت ئەم خشتەی خوارەوە ئەنجامەکانی ئەم تاقیکردنەوانە ڕووندەکاتەوە، بەهەزاران کیلۆمەتر.

تایەی چەشنی 1	66	43	37	50	54
تایەی چەشنی 2	54	49	47	48	52

أ هەریەك لە مەودا و لادانی ناوەندی بۆ ژمارەی ئەو کیلۆمەترانە بدۆزەرەوە کە هەریەك لەم جۆرە تایانە بڕیویەتی.

ب ئەم پێوەرانە ئاماژە بۆچی دەکەن دەربارەی هەریەك لەم دوو جۆرە تایانە.

شیکار

أ

تایەی چەشنی یەکەم

مەودا $66-37=29$ واتە 29 000 م

بۆ هەژمێرەی لادانی ناوەندی. دەست بکەبە هەژمێرکردنی ناوەند

$$\bar{x}=\frac{66+43+37+50+54}{5}=50$$

پاشان لادانی هەر بەهایەك لەم ناوەندەوە هەژمێربکە.

بۆ ئەمەش ئەم خشتەیە ڕێك بخە .

تایەی چەشنی دووەم

مەودا $54-47=7$ واتە 7 000 م

بۆ هەژمێرکردنی لادانی ناوەندی. دەست بکەبە هەژمێرکردنی ناوەند

$$\bar{x}=\frac{52+48+47+49+54}{5}=50$$

پاشان لادانی هەر بەهایەك لەم ناوەندەوە هەژمێربکە.

بۆ ئەمەش ئەم خشتەیە ڕێك بخە .

x_n	$\lvert x_n-\bar{x}\rvert$
66	16
43	7
37	13
50	0
54	4
کۆ	40

پاشان لادانی ناوەندی هەژمێر بکە بەم شێوەیە:

لادانی ناوەندی

$\frac{16+7+13+0+4}{5}=8$ واتا $8000\ km$

x_n	$\lvert x_n-\bar{x}\rvert$
54	4
94	1
47	3
48	2
52	2
کۆ	12

پاشان لادانی ناوەندی هەژمێر بکە بەم شێوەیە:

لادانی ناوەندی

$\frac{4+1+3+2+2}{5}=2.4$ واتا $2400\ km$

ب تێبینی بکە کە لادانی ناوەندی بۆ تایەی چەشنی 2 کەمترە لە لادانی ناوەندی تایەی چەشنی 1ئەمەش ڕێگات پێیدەدات کە بلێیت کە ناوەندی پێدراوەکانی چەشنی 2 زیاتر باوەڕی پێدەکرێت.

هەوڵبدە مەوداو لادانی ناوەندی بۆ پێدراوەکانی تایەی چەشنی سێیەم هەژمێربکە و بەراوردی بکە لەگەڵ پێوەرەکانی کە دەگەڕێنەوە بۆ دوو تایەی پێشوو.

تایەی چەشنی 3	64	52	50	49	35

خاڵی چاودێری ✔ ئایا دەتوانرێ بۆ دوو کۆمەڵە پێدراوەکانی هەمان مەودایان هەبێت بی ئەوەی لادانە ناوەندییەکانیان وەك یەك نەبن؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەرەوە بە نموونە.

لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی: دوو پێوەرن بۆ پەرتبوون بەکاردەهێنرێن بۆ بەراوردکردنی پێدراوەکان و شیکارکردنیان.

لێکنەچوون: $\sigma^2=\frac{1}{n}\left((x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2\right)$

لادانی پێوانەیی $\sigma=\sqrt{\sigma^2}$ ڕەگی دووجای لێکنەچوون.

نموونە 2 **لادانی پێوانەیی هەژمێربکە بۆ ئەو دوو تایەی کە دوو چەشنی تایەکە لە نموونەی پێشوو بڕیویانە.**

جێبەجێکردنەکان
پیشەسازی

شیکار

تایەی چەشنی یەکەم

$\bar{x}=\frac{66+43+37+50+54}{5}=50$

x_n	$x_n-\bar{x}$	$\lvert x_n-\bar{x}\rvert^2$
66	16	256
43	−7	49
37	−13	169
50	0	0
54	4	16
سەرجەم	0	490

تایەی چەشنی دووەم

$\bar{x}=\frac{54+49+47+48+52}{5}=50$

x_n	$x_n-\bar{x}$	$\lvert x_n-\bar{x}\rvert^2$
54	4	16
49	−1	1
47	−3	9
48	−2	4
52	2	4
سەرجەم	0	34

لێکنەچوون: $\sigma^2 = \frac{490}{5} = 98$

لادانی پێوانەیی: $\sigma = 9.9$ واتە 9 900 *km*.

لێکنەچوون : $\sigma^2 = \frac{34}{5} = 6.8$

لادانی پێوانەیی: $\sigma = 2.6$ واتە 2 600 *km*.

ئەم ئەنجامانەی لە نموونەی پێشوودا دەست کەوتووە دڵنیامان دەکات کە لادانی پێوانەیی بۆ تایەی 2 کەمترە لە لادانی پێوانەی بۆ تایەی 1 .

هەوڵبدە لادانی پێوانەیی چەندە بۆ تایەی 3 .

خاڵی چاودێری ✔ ئەگەر لادانی پێوانەیی بۆ تایەی چوارەم یەکسان بێت بە 1 500km. لەبارەی ئەم تایە چی دەڵێیت بە بەراوردکردنی لەگەڵ دوو تایەی 1 ، 2 ؟

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە کام دوو پێوەر زیاتر بەکاردێت: لێکنەچوون یان لادانی پێوانەیی؟هۆی وەڵامەکەت لێکبدەوە؟ بەگەڕانەوە بۆ ناوەندی پلەکانی گەرما لە دوو شاری ڕیاز و جدە.ئەم خشتەیەی خوارەوە پێوەرەکانی پەرتبوون ڕووندەکاتەوە بۆ ناوەندی پلەکانی گەرما لەم دوو شارەدا.

پێوەر	ڕیاز	جدە
مەودا	22.71	9.38
لادانی ناوەندی	6.91	2.83
لێکنەچوون	66.46	11.2
لادانی پێوانەیی	8.15	3.35

ئەوە مانای ئەوەیە کە ناوەندی پلەی گەرما پەرتبوونەکەی کەمترە لە جدە تا ڕیاز لە بەرئەوەی لادانی پێوانەیی شاری یەکەم کەمترە لە لادانی پێوانەیی شاری دووەم.

ڕاهێـــــــنـــان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1 بۆچی هەریەك لە لادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی ژمارەیەکی سالب نین؟

2 پەیوەندی لە نێوان لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی ڕوونبکەرەوە. ئایا لادانی پێوانەیی هەمیشە کەمترە لە لێکنەچوون؟ وەڵامەکەت لێکبدەوە.

3 بۆچی هەریەك لە لادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی زیاتر پەرتبوون دەردەخەن وەك لەمەودا؟

ڕاهێنان و ئاڕاستەکراو

جێبەجێکردنەکان

ئاری	توانا
81	98
84	68
88	99
82	59
85	96

4 تاقیکردنەوە ئەم خشتەیەی بەرامبەر نمرەکانی دوو خوێندکار لە 5 تاقیکردنەوە ڕووندەکاتەوە. مەوداو لادانی ناوەندی بۆ نمرەکانی هەردوو قوتابی ئەژمێربکە. وە ڕوونی بکەوە کە ئەم پێوانانە چی دەگەیێنن؟

5 لادانی پێوانەیی بۆ نمرەکانی ئەو دوو خوێندکارە ئەژمێربکە.

ڕاهێنانی جێبەجێکردن

مەودا و لادانی ناوەندی بۆ ئەمانە ئەژمێربکە.

6 8; 10; 3; 9; 10

7 1; 2; 4; 2; 6

8 31; 103; 34; 98; 107; 23

9 32; 23; 68; 74; 26; 93

10 2; 13; 9.4; 7.3; 12.3; 8.6; 7.6

11 1; 11; 14.2; 8.4; 12.2; 15.2; 10.9

12 −1.22; 4.35; −2.42; 2.33; 4.66

13 8.72; 7.43; 2.92; −3.56; 8.78

لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ ئەمانە ئەژمێربکە.

14 9; 10; 10; 8; 7; 11; 12; 9

15 8.1; 10.3; 3.4; 9.8; 10.7

16 −3; 2; −5; 4; −2; 8; 9; −1

17 2; 4; −8; 8; 7; −2; −4; 3; 7

لادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی ئەژمێربکە، کام پێوەر لەم دوو پێوەرانە کەمتر پابەندە بەبەهای دەستکەوتووەوە؟

18 20; 30; 40; 500

19 0; 500; 510; 520

بەرەنگاری

20 دوو کۆمەڵە بەها پێك بهێنە کە هەمان مەودایان هەبێت. ولادانی پێوانەکانیان جیاواز بێت

21 ئایا دەبێت لادانی پێوانەیی بۆ کۆمەڵە بەهایەك یەکسان بێت بە سفر؟ئەگەر ئەوە لە توانادایە، مەرجەکانی بەدی هێنانی دیاریبکە. نموونەیەك بەکاربهێنە بۆ باسەکەت.

بەستنەوە

22 گۆڕانکاری چی ڕوودەدات لە لادانی پێوانەیی بۆ کۆمەڵە بەهایەك ئەگەر ژمارەیەکی دیاریکراوی a بخرێتە سەر هەموو بەهاکانی کۆمەڵەکە؟ چی ڕوودەدات لە لادانی پێوانەیی کۆمەڵە بەهایەك ئەگەر هەموو بەهاکانی کۆمەڵەکە لە ژمارەیەکی دیاریکراوی وەك a بدرێت؟

وەرزش ئەم خشتەیەی خوارەوە ژمارە پێوانەییەکان (بە خولەك و چرکە و بەشەکانی سەد لە چرکەدا) بۆ کوڕان وکچان ڕووندەکاتەوە کە بەشداریان لە پێشبڕکێیەکی هەزارمەتریدا کرد بۆ خلیسکاندن لەسەر بەفر.



	1976	1980	1984	1988	1992	1994	1998
کوڕان	1:59.38	1:55.44	1:58.36	1:52.06	1:54.81	1:51.29	1:47.87
کچان	2:16.58	2:10.95	2:03.42	2:00.68	2:05.87	2:02.19	1:57.58

23 ناوەند و ناوەڕاستە بۆ ژمارە پێوانەییەکانی کوڕان وکچان هەژمێربکە.

24 مەوداو لادانی پێوانە بۆ کوڕان وکچان هەژمێربکە: بەو پێوەرانە دەربارەی ژمارە پێوانەییەکان کوڕان وکچان چی دەڵێیت؟

25 لادانی پێوانەی بۆ کوڕان وکچان چی دەڵێن؟



ڕوانین بۆ دواوە

بەبەکارهێنانی یاسا، دوو ڕەگی ئەم دوو هاوکیشە دووجایانە بدۆزەرەوە. وەڵامەکەت نزیکبکەوە بۆ نزیکترین دە نزیکبکەوە.

26 $3x^2 = 10x + 1 = 0$

27 $2x^2 + 12x - 4 = 0$



ڕوانین بۆ پێشەوە

28 زۆرجار ئامارناسان پەنادەبەن بۆ بەکارهێنانی سامپلێك بۆ توێژینەوەی کۆمەڵە بەهایەك، بۆ ئەمەش دەست بەکار دەبن لە پێوەرەکانی ئاماری سامپلەکە هەمووی. ئەوان وای دادەنێن کە ناوەندی نموونەکە ناوەندی کۆمەڵەکە دەردەخات. بەڵام بۆ لادانی پێوانەیی ئەوان لێکنەچوونی سامپلەکە هەژمێر دەکەن بە یاسایەك کەمێك جیاوازە لەگەڵ یاسای هەژمێرکردنی لێکنەچوونی کۆمەڵەکە. ئەوانە ئەم یاسایە بەکاردەهێنن.

$$\text{لێکنەچوونی سامپلەکە} = \frac{1}{(n-1)}\left((x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2\right)$$

أ لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ ئەم نموونەیە هەژمێربکە. 15; 18; 16; 5; 12

ب بۆ مەبەستی هەژمێرکردنی ناوەندی ژمارەی ئوتومبیلەکان لە خێزانێك. ئەنجوومەنی شارەوانی شارێك هەستا بە بەکارهێنانی سامپلێك کە لە 10 خێزان پێکهاتبوو بە هەڕەمەکی هەڵبژێرابوون. لە وەرگرتنی ڕاپرسی لەم سامپلە گەیشتنە ئەم ژمارانە:
2; 3; 2; 1; 1; 4; 2; 1; 3; 4 ناوەندی ژمارەی ئوتومبیلەکان لای یەك خێزان بخەملێنە لەگەڵ لادانە پێوانەییەکەی.



ئەی گەشتیار لەگەڵ خۆتم بەرە

لەگرنگترین کێشەکانی بەرەو ڕووی کۆمپانیاکانی فڕۆکەوانی دەبنەوە کێشەی ڕێکخستنی ڕێکوپێك بۆ کرداری تۆمارکردنی گەشتیارەکان و کەلوپەلەکانیانە. بۆ گەیشتن بە باشترین چارەسەر بۆ ئەم کێشانە پلاندانەرەکانی ئەم کۆمپانیایانە پەنا دەبەنە بەر ئەنجامدانی کرداره ئامارییەکان و تویژینەوەی ئەنجامەکان بەکرداری بیرکاری، لەوانش هەژمارکردنی ئەگەرەکان. لەمەودوا کۆمپانیاکە هەڵدەستێت بەسێ چالاکی لە بارەی کێشەی تۆمارکردنی گەشتیارەکان.

چالاکی 1

ئامارناسانی کۆمپانیاکە بەلایانەوە گرنگە تویژینەوەی تەواوبکەن لەسەر ئەو کاتەی کە کرداری تۆماری گەشتیارەکان پێویستیەتی.و شایەنی باسە لێرەدا ئاماژە بۆ ئەوە بکەین کە ئەم کاتە لە گەشتیارێکەوە دەگۆڕێ بۆ گەشتیارێکی تر. بە هۆی جیاوازی بارودۆخی گەشتیارەکان.
ئامارناسەکان دەستیانکرد بە لێکۆلینەوەی کاتی خایەنراو بۆ تۆمارکردنی هەر گەشتیارێك لەو پەنجا گەشتیارەی گەیشتونەتە نووسینگەی تۆمارگەکە، لە نێوان کاتژمێر 1:00 و کاتژمێر 1:10 و ئامارناسان گەیشتنە ئەم ئەگەرانەی کە لەم خشتەیەدا ڕوونکراوەتەوە

کاتی خایەنراو بە چرکە	10	20	30	40	50	60
ئەگەر	0.052	0.132	0.158	0.135	0.123	0.104

کاتی خایەنراو	70	80	90	100	011	120
ئەگەر	0.058	0.034	0.116	0.050	0.026	0.012

کاتەکان نزیککراونەتەوە لە نزیکترین چەند جارە لە دە چرکەدا، و ئەگەرەکان بۆ نزیکترین بەش لە هەزار. خشتەکە بەم واتەیە دەخوێنرێنەوە ئەگەری کاتی تۆمارکردنی گەشتیارەکە لە 10 چرکەدا بریتیە لە 0.052 وئەگەری کاتی پێویست لە 20 چرکەدا دەکاتە 0.132 .
ئامارناسەکان دەیانەوی ئەگەری کاتی پێویست بۆ تۆمارکردنی 50 گەشتیارەکە زۆرتربێت لە 50 خولەکدا. ڕێگای یەکەم بۆ دیاریکردنی ئەمە. پێویست دەکات بە تۆمارکردنی هەموو ئەو کاتانەی کە ژمارەیەکی زۆر لە گەشتیارەکان پێویستیان بووە و پوختەکردنی ئەنجامەکە؟ بەڵام ئەم ڕێگایە پێویستی بە کات و توانا و تێچوون هەیە لەبەر ئەوە پەنایان بردە بەر وەك **نواندن Simulation** . چۆن هەستان بەم لێکچونە؟
پەنایان بردەبەر ئەو وردەکاریانەی کە ئەگەرەکانی پێ هەژمارکرابوو لە خشتەی پێشوو لەبەر ئەوەی وردەکارییەکە نزیککرابۆوە بۆ نزیکترین بەش لە هەزار.



بڕیاریاندا کە گەیشتنی 1000 گەیشتیار وەك یەك لێکردن بکەن بۆ ئەوەی بگەنە ئەو مەبەستە. هەستان بە کۆکردنەوەی ژمارەکان لە 1 بۆ 1000 لە **چەشنەکاندا**.

بەپێی ئەگەرەکانی خشتەی پێشوو وایان دانا کە ژمارەکان لە 1 بۆ 52 بەرامبەری ئەگەری 0.052 دێت. و ژمارەکان لە 53 بۆ 184 (132 ژمارە) بەرامبەر ئەگەری 0.132 و بێت و هەروەها...

خشتەکەی بەرامبەر تەواو بکە

کات	ئەگەرەکان	تۆمارکردنی گەشتیار
0	0	000
10	0.052	052–001
20	0.132	184–053
30	0.158	342–185
⋮	⋮	⋮

چۆن ئەم خشتەیە بەکار دەهێنێت؟ داوا بکە لە بژمێری ڕونکردنەوەیی بەهەڕەمەکی ژمارەیەکت بداتێ بکەوێتە نێوان 1 و 1000 کە ئەو دوو ژمارەیەی تێدابێت. وا دابنێ کە ئەو ژمارە هەڕەمەکییە گەیشتنی گەشتیارەکە بۆ نوسینگەی تۆمارکە بنوێنی. خشتەی پێشوو بەکاربێنە بۆ دیاریکردنی ئەو کاتەی کەگەشتیارەکە ویستویەتی بۆ تۆمارکردن.

ئەگەر ژمارە هەڕەمەکیەکە 122 بێت بۆ نموونە وادابنێ ئەو کاتەی کە گەشتیارەکە پێویستیەتی بۆ تۆمارکردنی 20 چرکەیە چونکە ژمارە 122 دەکەوێتە نێوان هەردوو ژمارەی 53 و 418 لە ستونی سێیەمدا.

چالاکی 2

کاتی گەیشتنی 50 گەشتیار بۆ نووسینگەی تۆمارگە لە نێوان کاتژمێر 1:00 و کاتژمێر 1:10 هەڵدەستیت بەوەی (وەك یەکێکیان لێ بکەیت) بە داواکردن لە بژمێرەکە 50 ژمارەی هەڕەمەکیت بداتێ ئەوەی کە دەستتکەوتووە لەم خشتەیەی بەرامبەرت ڕێکبخە.

1 بژمێری ڕونکرنەوەیی بەکاربهێنە بۆ دەستکەوتنی 50 ژمارەی هەڕەمەکی کە بکەوێتە نێوان1 و 1000 و ئەم دوو ژمارەیە خۆشیانی تێدابن.

2 ستوونی دووەم لەخشتەکەدا تەواوبکە.

3 ئەو خشتەیەی کە دروستتکردوە لە چالاکی یەکەم بەکاربهێنە. بۆ تەواوکردنی ستوونی سێیەم. نموونە: ئەگەر ژمارە هەڕەمەکیەکە 179 بێت ئەو کاتەی کە پێویستە دایبنێت لە ستوونی سێیەم بەرامبەر 179 دەکاتە 20 چرکە.

گەشتیار	ئەو ژمارە هەرەمەکییە گشتیارەکە دەنوێنرێت	کات
1		
2		
3		
⋮		
49		
50		

چالاکی 3

1 نواندنی گەیشتی 50 گەشتیار کە بۆ نوسینگەی تۆمارگە 10 جار دووبارەبکەوە. ئەگەری کاتی پێویست بۆ تۆمارکردنی گەشتیارەکان کە لە 50 خولەك زیاترە بخەملێنە.

2 تێبینیت کرد لە کاتی ئیشکردنت لەم وانەیەدا چارەسەرکردنی کاری تۆمارکردنی گەشتیاران ئاسان نییە. ئایا دەتوانیت لەسەرەتایی دەستپێکردنت بەکاری ئەم پرۆژەیە نمونەیەك بدەی لەسەر بارێکی تر کە بتوانرێ نواندن بەکاربهێنرێت بۆ دیاریکردنی ئەگەرەکان؟ ئەمە ڕوونبکەرەوە.

6

پێداچوونەوەی بەش

1 سۆزان گۆیەکی لە تورەگەیەك ڕاکێشا کە 3 گۆی سوور و 3 گۆی شینی تێدابوو ئەگەری ئەوەی گۆی ڕاکێشراو سوور بێت چەندە؟

2 ئاواز گۆیەکی لە تورەگەیەك ڕاکێشا کە 4 گۆی سوور و 10 گۆی ڕەشی تێدابوو. ئەگەری ئەوەی گۆ ڕاکیشراوەکە سوور بێت چەندە؟

ئاهەنگێك لە نێوان کاتژمێر 8:00 د.ن و 8:30 د.ن دەست پێدەکات ئەگەری گەیشتنی یەکەم میوان بدۆزەرەوە لەنێوان.

3 8:00 د ن و 8:05 د ن ؟

4 8:12 د ن و 8:18 د ن ؟

5 8:21 د ن و 8:24 د ن ؟

6 چەند وشەی نهێنی لە 4 پیت دەتوانیت پێکبهێنی بەبەکارهێنانی 5 پیت لە پیتەکانی ئەبجەدی بەبێ دووبارەبوونەوە؟

7 لە 4 پیت چەند وشەی نهێنی دەتوانیت پێکبهێنیت بەبەکارهێنانی 5 پیت لە پیتەکانی ئەبجەدی لەگەڵ ڕێگادان بە دووبارە بوونەوە؟

8 بەچەند ڕێگا دەتوانیت 6 شەشپاڵووی ڕەنگ جیاواز لە ڕیزێکدا ڕیزبکەی.

9 بەچەند ڕێگا دەتوانیت دوو کتێب لە 5 کتێب هەڵبژێری ولەسەر ڕەفەکە ڕیزیانبکەیت.

10 بەچەند ڕێگا 5 خوێندکار دەتوانن لە دەوری مێزێکی بازنەییدا دابنیشن؟

11 بەچەند ڕێگا 8 خوێندکار دەتوانن لە دەوری مێزێکی بازنەییدا دابنیشن؟

12 بەچەند ڕێگا دەتوانیت دوو پەرتووک هەڵبژێری لە نێوان 10 پەرتووکدا؟

دلۆڤان بەردە زارێکی هەڵدا. ئەگەری هەریەك لەم ڕووداوانە بدۆزەرەوە

13 دەستکەوتنی ژمارەی 4 یان 7

14 دەستکەوتنی ژمارەی 1 یان 6

15 دەستکەوتنی ژمارەی تاك یان گەورەترە لە 4

16 دەستکەوتنی ژمارەی جووت یان بچووکترە لە 4

17 دەستکەوتنی ژمارەی گەورەتر لە 1

18 دەستکەوتنی ژمارەی گەورەتر لە 2

ئەگەری ئەم ڕووداوانە هەژماربکە.

19 لەدایکبوونی 3 منداڵی کوڕ یەك بەدوای یەك لە نەخۆشخانەی لە دایکبوون

20 دەستکەوتنی دوو ژمارەی جووت لە هەڵدانی دوو بەردەزار.

21 مەودا و لێکنەچوون و لادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی بۆ ئەم کۆمەڵە بەهایانە هەژمێربکە. 3، 2، 3، 5، 7، 5.

مەودا و لادانی ناوەندی بۆ ئەم کۆمەڵە بەهایانە هەژمێربکە

22 14; 11; 8; 14; 4; 12; 10; 6

23 20; 22; 15; 14; 13; 17

24 2; −3; 9; −7; 6; 3

25 . 21; 24; −22; 13; 12; −8; 4

لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ هەریەك لەم کۆمەڵە بەهایانە هەژمێربکە.

26 20; 19; 16; 14; 13; 11; 18; 15; 12; 10

27 160; 80; 180; 130; 140; 100

38 14; 13; 11; 9; 7; 14; 12; 9; 8

29 2; 20; 18; 12; 6; 4; 3; 2; 12; 4; 3



تاقیکردنەوەی بەش

ئەگەری هەر ڕووداوێك لەمانە دیاریبکە

1 گۆیەك لە تورەگەیەك ڕاكێشرا كە 4 گۆی سوور و 4 گۆی سەوزو 4 گۆی شین و 40 گۆی زەردی تێدابوو. ئەگەری ئەوەی گۆی ڕاكیشراو سوور بێت.

2 ڕاكێشرانی گۆیەكی سەوز لە تورەگەیەك كە 8 گۆی سەوز و 6 گۆی سووری تیدابوو لە كاتی ڕاكیشانی یەك گۆ.

3 دەستكەوتنی ژمارەی تاك لە هەڵدانی بەردەزارێك.

4 **ڕەنووسكردن** ڕەنووسكردنی پلیتی مۆڵەتی ڕاوكردن لە دوو پیتی جیا لە بیست و هەشت پیتەكانی زمانی عەرەبی و 8 ڕەنووسی جیاواز لە 10 ڕەنووسە بنەڕەتییەكە. ژمارەی ڕەنووسكراوەكانی كە لە تواناداپە چەندە؟

ئەنجامی ئەم برانە بدۆزەرەوە.

5 $12! - 7!$

6 ${}_8P_3$

7 بەچەند ڕێگا دەتوانرێ سەرۆك وپاریدەدەری سەرۆك ڕازگری لێژنەیەك هەڵبژێری كە پێكهاتووە لە 24 ئەندام؟

8 ژمارەی گۆڕینەكانی وشەی (كوردستان) چەندە؟

9 **وەرزش** بەچەند ڕێگا دەتوانیت 3 گۆی ڕەنگ جیاواز بەشبكەیت بەسەر 32 سەندوقی ڕەنووس كراودا ؟

ئەمانە بدۆزەرەوە

10 ${}_8C_3$

11 ${}_8C_8$

12 $\frac{{}_8C_5}{{}_5C_3 \times {}_5C_2}$

13 **بازرگانی** چێشتخانەیەك ژەمێك خواردن كەپێكدێت لە هەڵبژاردنی 3 قاپ خواردن لە نێوان 7 قاپدا میوانێك هەڵیبژێرێت ئەم هەڵبژاردنە بە چەند ڕێگا دەبێت؟

بەترۆس گۆیەكی ڕاكیشا لە تورەگەیەك كە 12 گۆی هاوشێوەی تێدابوو ڕەنووسكراون لە 1 تا 12 .ئەگەری ئەوەی گۆ ڕاكیشراوەكە یەكێك لەم ژمارانە هەڵگرێت چەندە.

14 ژمارە 7 یان ژمارەیەكی جووت.

15 ژمارەیەكی خۆبەش یان ژمارەیەكی چەند جارەی 4 .

16 ژماریەكی تاك یان ژمارەیەك چەند جارەی 5 بێت.

17 ژماریەك گەورەتربێت لە 8 یان ژمارەیەك چەند جارەی 3 بێت.

18 ژمارەیەكی جووت یان جووت یان بچووكتر بێت لە 6 .

ئەگەری هەریەك لەم ڕووداوانە بدۆزەرەوە.

19 سیروان پارچە دراوێكی كانزایی و زارێكی هەڵدا. ڕووداوەكە دەستكەوتنی خەتێك و ژمارەی 5 بێت.

20 دەزگای بۆشایی ئاسمان كاتێكی هەڵبژارد بۆ هەڵدانی مەكۆكێكی بۆشایی لە هەفتەی داهاتوودا. ڕودەدات كە پێویستە لە ڕۆژی سێشەممە بێت لە نێوان كاتژمێر1پێش نیوڕو و كاتژمێر 2 پێش نیوەڕۆ.

بچووكترین بەها و گەورەترین بەها و مەودا بۆ هەریەكە لەم كۆمەڵە پێدراوانە دیاریبكە.

21 34; 65; 32; 19; 28; 23; 45; 59; 24; 18
34; 41; 19; 23; 54; 42; 27; 25; 39 .

22 7; 5; 8; 2; 6; 2; 5; 6; 1; 4; 9; 8; 5; 3

مەودا ولادانی ناوەندی بۆ هەر یەكە لەم كۆمەڵە بەهایانە بدۆزەرەوە

23 13; 11; 9; 7; 5; 3

24 33; 30; 25; 23; 15; 18; 12; 10

لێكنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ هەر یەكە لەم كۆمەڵە بەهایانە بدۆزەرەوە.

25 13; 11; 9; 7; 5; 3 .

26 33; 30; 25; 23; 15; 18; 12; 10

27 چی دەڵێیت دەربارەی كۆمەڵە بەهایەك لادانە پێوانەكەی سفر بێت؟

6

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

1 کام لەم جووتە ڕێکخراوانەی خوارەوە ئەم سستەمە ساغدەکاتەوە $\begin{cases}2y+x\le 6\\ y-3x\ge 4\end{cases}$

أ $(0, 5)$ ب $(-1, 2)$
ج $(1, -1)$ د $(0, 0)$

2 شیکاری لاسەنگەی $2(x+2)-7<8x+15$ بریتییە لە

أ $x>-3$ ب $x<-3$
ج $x>2$ د $x<2$

3 بۆ ئەوەی ئەم برە x^2-12x ببێتە دووجای تەواو دەبێت چی بخریتە سەری

أ 6 ب -6 ج 36 د -36

4 کام دەربڕین لەمانەی خوارەوە باسی پەیوەندی نێوان ئەم دوو ڕاستەهێڵە دەکات $y=-2x-3$ $y=\frac{1}{2}x$

أ دوو ڕاستەهێڵی ئاسۆیین ب دوو ڕاستەهێڵی ستوونین
ج ئەستوونن لەگەڵ یەکتر د تەریبن بەیەکتری

5 سادەترین شێوەی $\left(-\frac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$ دەکاتە.

أ $\frac{1}{25}$ ب $-\frac{1}{25}$
ج 25 د -25

6 پۆوتانی خاڵی ناوەڕاستی ئەو پارچە ڕاستەهێڵەی دوو سەرەکانی $(-4, -1)$ ، $(2, -7)$ بریتییەلە

أ $(-1, -3)$ ب $(-3, 3)$
ج $(-1, -4)$ د $(-3, -3)$

7 کامیان شێوەی گشتی ئەم برەیە دەنوێنێت.
$(5x^3-2x^2+x-10)+(2x^3-3x-1)$

أ $3x^3-2x^2-4x-9$
ب $3x^3+2x^2+4x-9$
ج $7x^3-2x^2-2x-9$
د $7x^3-2x^2-2x-11$

8 ئەم برە بەسادەترین شێوە بنووسە
$\frac{x^2+3x-4}{x^2}\times\frac{x^2-2x}{2x+8}$

9 ئەو هاوکێشەیە بنووسە لە سەر شێوەی لاری یەکتربڕینی بۆ ئەو ڕاستەهێڵەی بەم دوو خاڵە دا دەڕوات $(3, -4)$ $(2, 7)$

10 سفرەکانی نەخشە $f(x)=x^2-8x+12$ بدۆزەوە.

11 ئەم برە ئەگەر لەتوانادابوو شیتەڵیبکە. $5x^2+10x-40$

12 ئەم برە شیتەڵبکە $8x^3+64$

13 هاوکێشەکانی هەموو ڕاستەهێڵە دەرکەنارەکانی ئاسۆیی و ستوونی ئەم نەخشە ڕێژەییە بنووسە $f(x)=\frac{(x+2)^2}{3x}$

14 ئەم برە ئەگەر شیتاڵ دەکرێ، شیتەڵیبکە.
$6x^2+8x-15x-20$

15 ئەم برە بۆ سادەترین شێوە کورت بکەرەوە. $\dfrac{\frac{x+4}{9x^2}}{\frac{x-6}{3x^4}}$

16 کۆمەڵەی شیکاری ئەم هاوکێشەیە بدۆزەرەوە $\frac{6x+2}{3x}=6$

17 لاری ئەم ڕاستەهێڵە بدۆزەرەوە $y=8$

18 چی پێویستە بخرێتە سەر بڕی x^2+8x بۆ ئەوەی ببێتە دووجای تەواو.

چالاکییەکانی دەرەوەی پۆل.یانەی شەترەنج لە قوتابخانەیەکدا لە 12 ئەندام پێکهاتوە کە **5** گەورە و **7** یان بچوکە

19 چەند تیپ لە 6 یاریکەر پێکبێت دەتوانرێ پێکبهێنرێت بەمەرجێك بە لایەنی کەمەوە 3 گەورەی تێدابێت.

20 چەند تیپ لە 6 یاریکەر پێکبێت دەتوانرێت پێکبهێنرێت بە مەرجێك بەلایەنی کەمەوە 3 **بچووکی** تێدابێت.

21 چەند تیپ لە 6 یاریکەر پێکبێت دەتوانرێ پێکبهێنرێت بەمەرجێك بەلایەنی زۆرەوە 3 کوڕی تێدا بێت.

بۆ خۆشی کۆمەڵەی چاودێری کۆمەڵایەتی بە پێی ئەم خشتەیەی خوارەوە بەملیۆنان دینار یارمەتی هەژارانیدا لە ماوەی 12 مانگدا.

14.8	2.5	2.9	3.0	3.7	4.0
5.7	4.8	4.2	5.6	6.1	10.6

22 ناوەندی خەرجی مانگێك بدۆزەرەوە.

23 مەودا و لێکنەچوون و لادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی بۆ پێدراوەکانی خشتەکە بدۆزەرەوە.

بەشی حەفتەم

ئەندازە
Geometry

1. هەندێك لە دەسپێكەكانی ئەندازەی ئیقلیدس.
2. ڕاستەهێڵەكان و ڕووتەختەكان لە بۆشاییدا.
3. وێنە بینراوەكان.
4. چەندلا ڕێكەكان.
5. هاوڕێژەی ئەندازەیی.
6. بازنە.

پرۆژەی بەشەكە

پێداچوونەوە

تاقیكردنەوەی بەش

تاقیكردنەوەی كەڵەكەبوو

ئەندازە Geometry

بەشی
7

ئەندازە زانستێکی کۆن و تازەیە لە یەك کاتدا. دووهەزار ساڵە ئەندازە بەبێ دابڕان پێشدەکەوێت. ئەندازە لەکۆنەوە دەستپێکردووە و جێگای خۆی کردەوە لە کارەکانی ئەقلیدس و بەبەردەوامی لە برەودابوو تا دەگاتە کارەکانی فەیلەسوف و بیرکاریزانی فەرەنسی ڕینە دیکارت، تاکو گەیشتە سەردەمی تازە بەبەکارهێنانی بژمێرەکان و بژمێرە پێشکەوتووەکان. لەم بەشەدا فێری پەیوەندییە بنەڕەتیەکان دەبیت کە پێکهێنەرەکانی ئەندازە لە ڕووتەخت و بۆشاییدا بەیەکەوە دەبەستێتەوە. هەروەها فێردەبیت چۆن تەنەئەندازە سێ دوورییەکان وێنە بکێشیت لە ڕووتەختێکدا بەوشێوەیەی بینەرێك دەیبینێت.
هەروەها جێگۆرکێیەکی ئەندازەیی نوێ فێردەبیت کە جیاوازە لەو جێگۆرکێیانەی فێری بویت، بەوەی دووریەکان پارێزراونابێت و هەندێ شتی تریش فێردەبیت.

وانەکان
1. هەندێك لە دەسپێکەکانی ئەندازەی ئیقلیدس.
2. ڕاستەهێڵەکان و ڕووتەختەکان لە بۆشاییدا.
3. وێنە بینراوەکان.
4. چەندلا ڕێکەکان.
5. هاوڕێژەی ئەندازەیی.
6. بازنە
پرۆژەی بەش



دەربارەی پرۆژەی بەش

پێشتر بیرکاریزان جۆرج بێڵ ڕێسایەکی بۆ ڕووبەری چەندلا دۆزیبووەوە کە جیاوازبوو لە ڕێساکانی پێش خۆی. لەمەودوا کاغەزی خاڵدار (بەیانی) بەکاردەهێنێت و هەندێك خاڵ بەیەکدەگەیەنیت بۆ ئەوەی چەندلایەکت دەستکەوێت. و لەمەودوا شێوازێکت دەست دەکەوێت کە ڕێگات پێدەدات بەدارشتنی ڕێسایەك بۆ هەژمێرکردنی ڕووبەری ئەم چەشنە چەندلایانە. لەدوای کۆتایی هاتنی ئەم پرۆژەیە لە تواناتدا دەبێت.

- ڕووبەرەکانی هەندێك لە شێوە ئاڵۆزەکان هەژمێربکەیت، بەبێ بەکارهێنانی ڕێساکانی ڕووبەرە پەیرەوکراوەکان.

وانەی
1

هەندێك لە دەستپێكەكانی ئەندازەی ئیقلیدس
Building of Eculidean Geometry



بۆچی
دەتوانین شێوە ئەندازەییەكان بەكاربهێنین لە خاڵەكان و ڕاستەهێڵەكان و ڕووتەختەكان بۆ ئەوەی نموونەكانی بیركاری دروستبكەین بۆ شێوە ماددەكان ئەو نموونانە بەكاردێت، بۆ شیكاركردنی پرسیارەكان لە ژیاندا بەكاردەهێنرێت.

خەتی كاكێشانی لوولپێچ $M\ 31$ لە كۆمەڵەی ئەندرۆمید وەك هاوڕێی خەتی كاكێشانی ئێمە وایە. هەروەك خەتە كاكێشەكان لە ئەستێرەكان و هەسارەكان پێكدێن، ئاواش شێوە ئەندازەییەكان لە خاڵەكان پێكدێن.

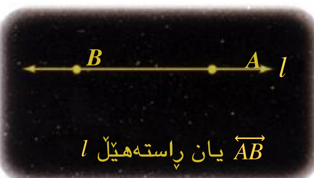
ئامانجەكان
- خاڵ و ڕاستەهێڵ و ڕووتەخت جیا دەكاتەوە.
- پارچە ڕاستەهێڵ و تیشك و گۆشە خاڵەكانی ڕێكی یەكتر لە یەك ئاست دەناسێت.
- لەو بەڵگەنەویستانە دەكۆڵێتەوە كە پەیوەندیان بە خاڵەكان و ڕاستەهێڵەكان و ڕووتەختەكانەوە هەیە.

پێكهاتە بنەڕەتییەكانی ئەندازە Basic elements in geometry

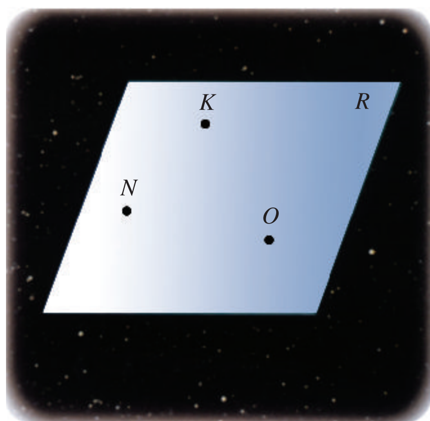
شێوە ئەندازە بنەڕەتییەكان بریتیین لە **خاڵ** و **ڕاستەهێڵ** و **ڕووتەخت**. هەر ئەوانەش هەموو شێوەكان و تەنەئەندازەییەكان پێكدێنن. زاناكانی بیركاری گەیشتنە ڕێگایەكی داخراو لە پێناسەكردنی ئەم دانانە، ئەوەی لە سەری ڕێككەوتن و پەسەندیانكرد كە ئەو دانانە وەربگرن بێ ئەوەی پێناسەیان بكەن، لەگەڵ ئەوەی ئەو دانانە پێناسە نەكراون، دەتوانین لێیان بدوێین. پێشەكی پێویستە بزانین كە شێوەكان و تەنەئەندازییەكان لە جیهانی هەستپێكراوی ئێمە دانین، خاڵ پێوانەی نییە، ڕاستەهێڵ پانی نییە ئەم پەرتووكە نواندنی شێوەكان وتەنە ئەندازەییەكانی تێدایە. بەڵام نواندن شتێكە و شێوە و تەنی ئەندازەیی شتێكی ترە. شێوەكان و تەنە ئەندازییەكان تیۆریانە تەنها لە هۆشمان هەیە.



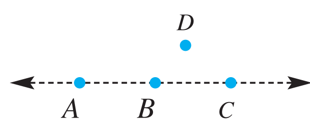
خاڵ كاتێ سەیری ئاسمان دەكەیت لە شەوێكی ساماڵدا هەندێك ئەستێرەی دووری درەوشاوە دەبینیت وا دەردەكەون كە خاڵن. خاڵ بەو شوێنەوارە دەنوێنرێت كە نوكی قەڵەمەكە بەجێی دێڵێ لەسەر كاغەزەكە.پێوەری ئەم نواندنە گەورە دەبێت وبچووك دەبێتەوە، لە كاتێك ئەو شوێنەوارەی كە خاڵەكە دەینوێنێ پێوانەی نییە. زۆربەی كات پیتەكانی ... A, B, C بەكاردێت بۆ ناولێنانی خاڵەكان



ڕاستەهێڵ ڕاستەهێڵی ئەندازەیی پانی نییە. هێڵێكە خواروخێچی تێدانییە، لە هەردوو سەرەوە بۆ ناكۆتا درێژدەبێتەوە بۆ ناولێنانی ڕاستەهێڵ ناوی دوو خاڵی جیاواز بەكاربهێنە كە پێیاندا بڕوات لەگەڵ دانانی نیشانەی تیر لەسەر هەردوو سەرەكانی و ئەم ڕاستەهێڵە بەم شێوەیە دەنووسرێت $\overleftrightarrow{AB}$ كە ناوی ئەو ڕاستە هێڵەیە بە دوو خاڵی A ، B دەڕوات و دەتوانیت ناو لە ڕاستەهێڵەكە بنێیت بەیەك پیت.



ڕووتەخت ڕووییەکی تەختە درێژدەبێتەوە بۆ ناکۆتایی لە هەموو لایەکانەوە. دەتوانیت بەشێک لە ڕووتەختێک بنوێنیت بەهەر ڕووییەک کە بەرزو نزمی تیدانەبێت. وەک ڕووییەکی مێز یان بەرگی پەرتووک. ئەو ڕووە تەختە لە وێنەی بەرامبەر دایە بەشێک لە ڕووتەختێک دەنوێنێ. بۆ ناولێنانی ڕووتەخت ناوی سێ خاڵ بنێ کە ڕووتەختەکە پێیدانایت: دەڵێین ڕووتەختی MNO، بەمەرجێک ئەو سێ خاڵە نەکەونە سەر ڕاستەهێڵێک و دەتوانیت یەک پیت بەکاربهێنین بۆ ناو لێنانی ڕووتەختەکە.دەڵێین ڕووتەختی R.



خاڵەکانی A، B، C لە ڕێکی یەکترن

خاڵەکانی A، B، Dلە ڕێکی یەکترنین

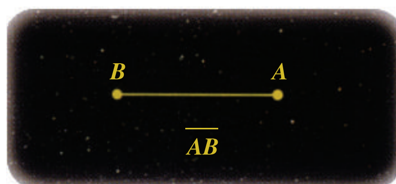
بە چەند خاڵێکی جیاواز دەڵێین لە ڕێکییەکترن ئەگەر بکەونە سەر **یەک** ڕاستەهێڵ. ئەم وێنەی بەرامبەر ڕوونی دەکاتەوە کە خاڵەکانی A و B و C لە ڕێکی یەکترن. دەڵێین ژمارەیەکی لە خاڵ جیاوازەکان لەیەک ئاست دەبن ئەگەر بکەونە ناویەک ڕووتەخت. تێبینی ئەوە بکە کە دوو خاڵ هەمیشە لە ڕێکی یەکترن و سێ خاڵ هەمیشە لەیەک ئاستدان.

پێناسەی شێوە ئەندازەییەکان بەپێی پێکهاتە بنەڕەتییەکانی ئەندازە
Defining Figures in Terms of the Basics

دەتوانیت پێناسەی ژمارەیەک لە شێوە ئەندازییەکان بکەیت بە دەستپێکردن لە پێکهاتە بنەڕەتییەکانی ئەندازەوە. لەمەودوا پێناسەی پارچە ڕاستەهێڵ و تیشک و گۆشە دەکەین بەم شێوەی خوارەوە.

Segment Definition پێناسەی پارچە ڕاستەهێڵ

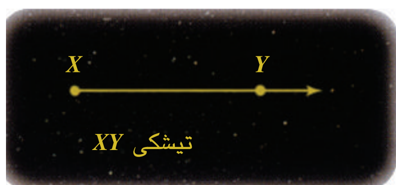
پارچە ڕاستەهێڵ **Segment** بەشێکە لە ڕاستەهێڵ لە خاڵێکەوە دەستپێدەکات و لە خاڵێکی ترەوە کۆتایی دێت **Endpoints**. دوو سەرەکانی پارچە ڕاستەهێڵەکە ئەو دوو خاڵە دیاریان دەکات.



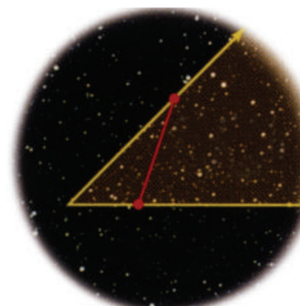
بۆ ناو لێنانی پارچە ڕاستەهێڵ ناوی دوو سەرەکەی بەکاربهێنە، خەتێک لەسەر هەردوو ناوەکە دابنێ. پارچە ڕاستەهێڵی $\overline{AB}$ بریتیە لەو پارچە ڕاستەهێڵەی کە A و B دوو لایەکەی دەنوێنن.

Ray Definition پێناسەی تیشک

تیشک **Ray** بەشێکە لە ڕاستەهێڵ کە لە خاڵێکەوە دەست پێدەکات و درێژدەبێتەوە بۆ ناکۆتا بە یەک ئاراستە. سەری تیشکەکە بریتیە لە خاڵی دەستپێکردن **Endpoints** .



بۆ ناولێنانی تیشک ناوی خاڵی سەری تیشکەکە و ناوی خاڵێکی تر بەکاربهێنە. نوسینی تیشکی YX ئەوە دەگەیەنێت سەری تیشکەکە (X)وە بەخاڵی Y دا ڕەوات.

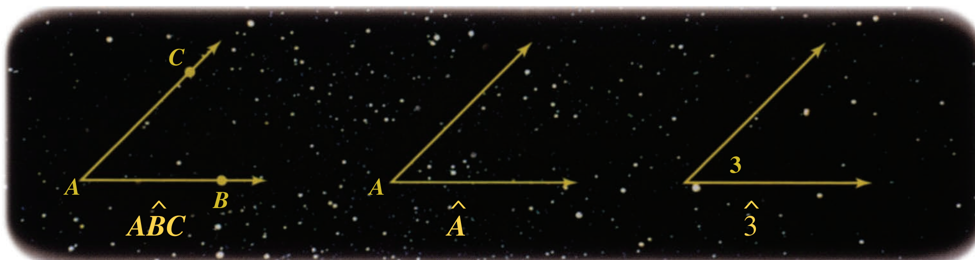


Angle Definition   پێناسەی گۆشە

گۆشە **Angle** ئەو شێوە ئەندازەییە لە ئەنجامی بەیەك گەیشتنی دوو تیشك پەیدادەبێت كە هەمان خاڵی دەستپێكردنیان هەیە. خاڵی دەستپێكردنەكە سەری گۆشەكەیە **Vertex** و دوو تیشكەكە دوو لای گۆشەكەیە **Sides** .

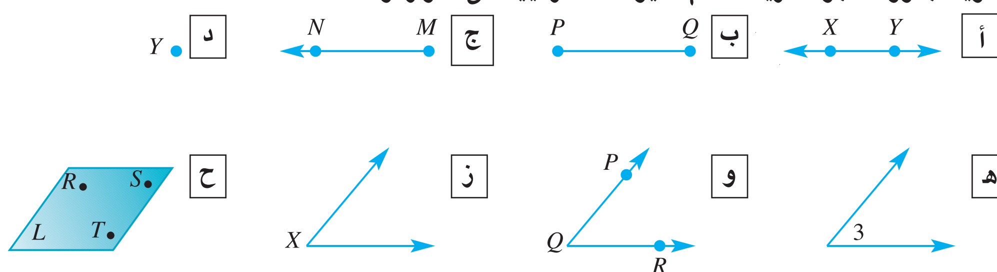
گۆشە ئەو ڕووتەختەی كە تێیدایە دەكات بە دوو بەشەوە دوو لاكانی گۆشەكە جیایان دەكاتەوە، ئەو دوو بەشە بریتین لە **ناوە گۆشە Interior** و دەرەگۆشە **Exterior**. ئەگەر خاڵێكی سەر یەكێك لەو دوو تیشكی گۆشە بگەیەنیت بەخاڵێكی تری سەر تیشكەكەی تر، ئەو پارچە ڕاستە هێڵەی ئەو دوو خاڵە دەگەیەنیت دەكەوێتە ناو گۆشەكەوە

بۆ ناولێنانی هەر گۆشەیەك دەتوانرێت یەكێك لەم سێ ڕێگایانەی خوارەوە بەكاربهێنرێت ڕێگای یەكەم دانانی پیتێك وەك D بۆ سەری گۆشەكە و دەخوێنرێتەوە بە گۆشەی D و بەشێوەی $\hat{D}$ دەنووسرێت. ڕێگای دووەم بۆ ووردەكاری زیاتر، سێ پیت بەكاردەهێنرێت یەكێكیان بۆ سەری گۆشە و دووانەكەی تر هەریەكیان دەكەوێتە سەر لایەكی گۆشەكە،وەك گۆشەی ABC كە دەنوسرێت بە شێوەی $B\ A\ C$ یان گۆشەی $C\ A\ B$ دەنوسرێت بە شێوەی $C\ A\ B$ ڕێگای سێیەم بە دانانی ڕەنووسێك لەسەر گۆشەكە وەك گۆشەی 3 دەنووسرێت $\hat{3}$.



نموونە

1 ناوێك بنووسە بۆ هەریەك لەم شێوە ئەندازەییانەی خوارەوە.



شیكار

أ) ڕاستەهێڵی XY یان ڕاستەهێڵی YX

ب) $\overline{PQ}$ یان $\overline{QP}$ یان پارچە ڕاستەهێڵی PQ

ج) تیشكی MN یان $\overrightarrow{MN}$ د) خاڵی Y هـ) $\hat{3}$ یان گۆشەی 3

و) $P\hat{Q}R$ یان $R\hat{Q}P$ یان گۆشەی RQP ز) $\hat{X}$ یان گۆشەی X

ح) ڕووتەختی TSR یان ڕووتەختی RTSیان ڕووتەختی STRیان ڕووتەختی SRT یان ڕووتەختی RST یان ڕووتەختی TSRیان ڕووتەختی L .

Intersection of Lines and Planes   یەكتربڕینی ڕاستەهێڵەكان و ڕووتەختەكان

دوو شێوەی ئەندازەیی یان دوو تەنی ئەندازەیی یان شێوە ئەندازەییەك و تەنێكی ئەندازەیی **یەكتری دەبڕن** كاتێك لە خاڵێك یان زیاتر هاوبەشبن. لەم بارەدا بە كۆمەڵەی خاڵە هاوبەشەكان دەوترێت یەكتربڕینی دوو شێوەكە یان دوو تەنەكە، یان شێوە و تەنەكە.

لەو چالاکیانەی کە لەوانەکەدایە، چەند ژمارەیەك لە بنەما بنەڕەتییەکان یان بەڵگەنەویستەکان لە ئەندازەدا فێردەبیت. ئەو بنەمایانە یەکتربڕینی شێوە ئەندازەییەکان و تەنەئەندازەکان دەگرێتەوە. ئەم بەڵگەنەویستانە ڕستەی ڕاستی شتەکانمان بۆ دڵنیادەکەن بەبێ سەلماندن.

چالاکی

دۆزینەوەی هەندێك بەڵگەنەویست لە بارەی توێژینەوەی نموونەیەك

Disconering Geometry Ideas in model

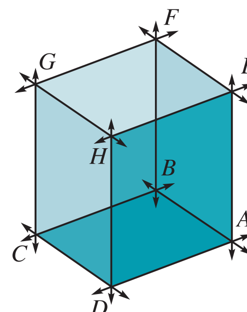
دەتوانیت بڕوانیتە وێنەی بەرامبەرت ئەمە نموونەیەکە بۆ ئەو شتانەی لە ژیانی ڕۆژانەمان دایە. وەك سندوق یان ژوور.هەر ڕستەیەك لەم ڕستانەی خوارەوە تەواوبکە بۆ ئەوەی بەڵگەنەویستەکەت دەستکەوێت.

1. سەرنجی نموونەکە بدە، دیاریبکە چۆن ڕاستەهێڵەکان یەکتری دەبڕن. یەکتربڕینی دوو ڕاستەهێڵ لە چی پێکدێت؟

بەڵگەنەویست

دوو ڕاستەهێڵی لەیەك ___؟___ یەکتردەبڕن.

خاڵی چاودێری ✓



ژمارەی ئەو ڕاستەهێڵانە چەندن کە لە هەر سەرێك لە سەرەکانی شێوەکە یەکتر دەبڕن؟ ئایا لەو بڕوایەدای کە ژمارەیەکی زیاتر هەیە بۆ ئەو ڕاستەهێڵانەی کە لە خاڵێکدا یەکتری دەبڕن. وەڵامەکەت ڕوونبکەرەوە بەبەکارهێنانی وێنەکە.

2. بەسەرەنجدانت لە نموونەکە جیایبکەرەوە، چۆن ڕووتەختەکان یەکتری دەبڕن یەکتربڕینی دوو ڕووتەخت لە چی پێکدێت.

بەڵگەنەویست

دوو ڕووتەخت لەیەك ___؟___ یەکتری دەبڕن.

خاڵی چاودێری ✓

لە نموونەکە ژمارەی ئەو ڕووتەختانە چەندن کە لە هەر ڕاستەهێڵێکدا یەکتریان بڕیوە؟ ئایا لەو ژمارەیە زۆرتر هەیە ؟

3. سەرنجی دوو خاڵی A و B بدە. چەند ڕاستەهێڵ بەهەردوو خاڵەکەدا دەڕوات؟ ئایا دەتوانیت بیر لە ڕاستەهێڵێکی تر بکەیتەوە کە بەودوو خاڵەدا بڕوات.

بەڵگەنەویست

تەنها یەك ___؟___ بە دوو خاڵی جیاوازدا دەڕوات؟

ئەو ڕاستە هێڵەی بە دوو خاڵی A ، B دەڕوات هێما دەکرێ بە هێمای $\overleftrightarrow{AB}$

خاڵی چاودێری ✓



4. سەیری خاڵەکانی A و B و C بکە، ئایا لەڕێکی یەکترن؟ چەند ڕووتەخت بەهەرسێ خاڵەکەدا دەڕوات؟ ئایا دەتوانیت بیر لە ڕووتەختێکی تر بکەیتەوە بەو سێ خاڵەدا بڕوات؟

بەڵگەنەویست

تەنها یەك ________ بەسێ خاڵدا دەڕوات کەلەڕێکی یەکترنەبن. ئەو ڕووتەختەی بەخاڵەکانی A و B و C دا دەڕوات بەڕووتەختی ABC دەناسرێت.

خاڵی چاودێری ✓

ڕووتەختێك لە ڕووتەختەكانی نموونەی پێشوو هەڵبژێرە و دوو خاڵ لە خاڵەكانی هەڵبژێرە.
ئەو ڕاستەهێڵە ناو بنێ كە بەو دوو خاڵەدا دەڕوات.ئایا ئەو ڕاستەهێڵە بەتەواوی دەكەوێتە ناو ڕووتەختەكەوە؟

بەڵگەنەویست

ئەو ڕاستەهێڵەی دوو خاڵی جیاواز لە ڕووتەختێكدا دەگەیەنێت دەكەوێتە ناو ______؟

خاڵی چاودێری ✓

ڕاهێـــــــنـــــــان

بەردەوامبوون لە بیركاریدا

1 جیاوازی چیە لە نێوان شێوە ئەندازەییەكان و شتەكان لە ژیانی ڕۆژانەدا؟

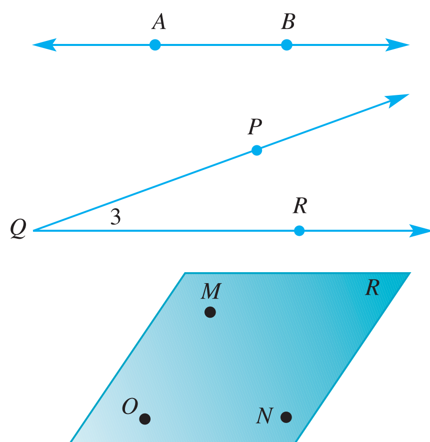
2 سەرنجی پۆلەكەت بدە. ئەو شتانە دیاریبكە كە خاڵ یان ڕاستەهێڵ یان ڕووتەخت دەنوێنێ.

3 بۆچی خاڵێك بەس نیە بۆ دیاریكردن و ناونانی ڕاستەهێڵێك؟

4 بۆچی دوو خاڵ بەس نیە بۆ دیاریكردن و ناونانی ڕووتەختێك؟

5 گرنگی ڕیزی خاڵەكان لەكاتی ناونانی تیشك چیە؟ ئەمە بە وێنە ڕوونبكەرەوە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەكراو



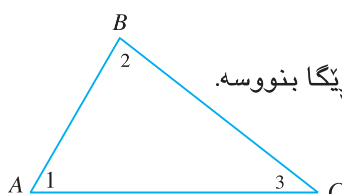
6 ئەم شێوەیەی بەرامبەرت بەكاربهێنە بۆ ناولێنانی خاڵ و ڕاستەهێڵ و پارچە ڕاستەهێڵ و تیشك.

7 لە شێوەی بەرامبەرت 4 ناو بۆ گۆشەكە بنووسە.

8 لە شێوەی بەرامبەرت 3 ناو بۆ ئەم ڕووتەختە بنووسە.

ڕاهێنان و جێبەجێكردن

سێگۆشەكە بەكاربێنە بۆ شیكاری پرسیارەكانی 9 تا 12



9 هەموو پارچە ڕاستەهێڵەكانی سێگۆشەكە بنووسە.

10 هەموو گۆشەیەك لە گۆشەكانی سێگۆشەكە بەسێ ڕێگا بنووسە.

11 دوو تیشكی هەر گۆشەیەك لە گۆشەكانی سێگۆشەكە بنووسە.

12 ئەو ڕووتەختە بنووسە كە سێگۆشەكەی تێدایە.

جێبەجێکردن

ئارەزووەکان وێنەی ئەم حەوزە ماسییەی خوارەوە بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکانی 13 تا 17 . ئایا هەریەک لە لە پێکهێنەرەکانی حەوزەکە خاڵ یان ڕاستەهێڵ یان ڕووتەخت دەنوێنێت؟

13 لایەک لە لاکانی حەوزەکە

14 دەنکە لم

15 ڕوویەک لە ڕووەکانی حەوزەکە

16 ڕووی ئاوەکە

17 گۆشەیەک لە گۆشەکانی حەوزەکە



ئایا ئەم ڕستانەی خوارەوە لە هەرپرسیارێك لە پرسیارەکانی 18–25 ڕاستە یان هەڵەیە. هۆیەکەی دیاریبکە.

18 ڕاستەهێڵ خاڵی سەری هەیە

19 ڕووتەخت سنووری هەیە

20 ئەگەر سێ ڕاستەهێڵ لە خاڵێکدا یەکتری ببڕن ئەوا دەکەونە یەك ڕووتەختەوە

21 دەکرێت دوو ڕووتەخت لەگەڵ ڕووتەختی سێیەم یەکتری ببڕن بەبێ ئەوەی خۆیان یەکتری ببڕن.

22 دەکرێت سێ ڕووتەخت لەیەك خاڵدا یەکتری ببڕن.

23 کام دوو خاڵ دەکەونە تەنها یەك ڕووتەخت.

24 کام سێ خاڵ دەکەونە تەنها یەك ڕووتەخت.

25 کام چوار خاڵ دەکەونە تەنها یەك ڕووتەخت.

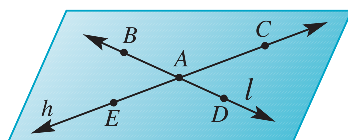
ئەم شێوەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکان لە 26 تا 30 .

26 ناوی ڕاستەهێڵێك لە شێوەکە بنووسە، 3 ناوی تر بۆ ئەو ڕاستەهێڵە بنووسە.

27 خاڵێك لە سەر ڕاستەهێڵی l ناوبنێ

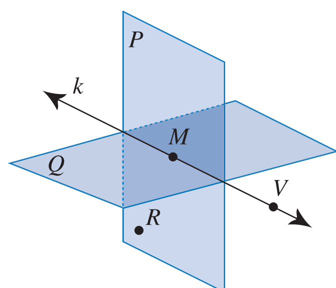
28 یەکتربڕینی دوو ڕاستەهێڵ l و h ناوبنێ

29 گۆشەیەك لە شێوەکە ناوبنێ، سەری ئەو گۆشەیە و ئەو دوو تیشکەی پێکیهێناوە ناوبنێ.



30 ئایا دەتوانرێت یەکێك لە گۆشەکانی شێوەکە ناوبنرێ $\hat{A}$ هۆی وەڵامەکەت دیاریبکە؟

بڕوانە ئەم شێوەی بەرامبەرت بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 31 بۆ 33

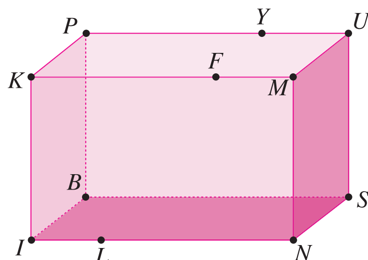


31 یەکتر بڕینی هەردوو ڕووتەختی P و Q ناوبنێ.

32 ڕاستەهیڵێك ناوبنێ کە بکەوێتە ناو ڕووتەختی Q

33 خاڵێك ناوبنێ کە بکەوێتە ناو ڕووتەختی P

ئەم شێوەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 34 بۆ 37



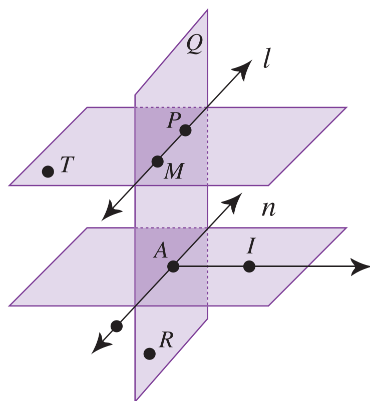
34 خاڵێك ناوبنێ لە سەر $\overline{KM}$

35 یەکتربڕینی $\overline{MU}$ ، $\overline{MN}$ ناوبنێ.

36 سێ خاڵ لە ڕێکی یەکتری بن ناوبنێ.

37 دوو پارچە ڕاستەهێڵ کە لەیەك ئاست بن ناوبنێ

بڕوانە شێوەی بەرامبەر بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 38 بۆ 40



38 یەکتربڕینی دوو ڕاستەهێڵ n و AI ناوبنێ

39 یەکتربڕینی ڕووتەختی Q و ڕووتەختی MPT ناوبنێ.

40 سێ خاڵ ناوبنێ کە لە یەك ئاست بن.

ژمارەی ئەو پارچە ڕاستەهێڵە جیاوازانەی کە دەتوانرێ ناوبنرێن لە هەریەك لەم شێوانەی خوارەوە چەندن؟ هەریەکیان ناوبنێ.

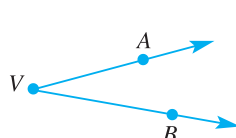


جەبر

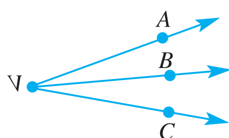
44 ڕێسایەکی گشتی بنووسە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی ئەو پارچە ڕاستەهێڵانەی کە دەتوانرێ ناویان لێبنرێت بە زانینی ژمارەیەکی دیاری کراو n لە خاڵەکان کە دەکەونە سە ر یەك ڕاستەهێڵ. ڕوونیبکەوە چۆن ڕێساکەت دۆزییەوە.

ژمارەی ئەو گۆشە تیژانەی کە دەتوانیت ناویان لێ بنێیت لە هەریەکێك لەم شێوانەی خوارەوە چەندن؟ناوەکانیان دیاریبکە.

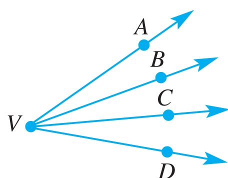
45



46

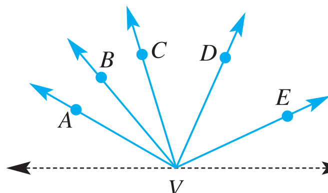


47



جەبر

48 ڕێسایەکی گشتی بنووسە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی ئەو گۆشانەی لە 180 بچووکترن کە دەتوانیت ناویان بهێنیت بە زانینی ژمارەیەکی دیاریکراو، n لەو تیشکانەی کە هەمان خاڵی دەست پێکردنیان هەیە ڕوونیبکەرەوە چۆن دۆزیتەوە. وای دابنێ کە هەموو تیشکەکان بکەونە دیوێکی ڕاستەهێڵەکەوە.هەروەك لەم شێوەیەی بەرامبەر ڕوونکراوەتەوە



ڕوانین بۆ دواوە

هاوکێشەیەك بە شێوەی لاری – یەکتربڕین بنووسە بۆ ڕاستە هێڵێك.

49 تەریب بێت بە ڕاستەهێڵی $y=\frac{3}{4}x-1$ و بەخاڵی $(-2, 5)$دابڕوات.

50 ئەستوون بێت لەگەڵ ڕاستەهێڵی $2x-3y=1$ و بەخاڵی $(-4, 2)$دابڕوات.

جیاکەرەوەی ئەم هاوکێشە دووجایانە هەژماربکە. و ژمارەی ڕەگەکانی دیاریبکە. پاشان ڕەگەکان هەژماربکە

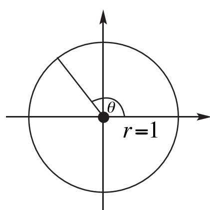
51 $x^2-6x+12=0$ **52** $4x^2-4x+1=0$ **53** $x^2-6x+8=0$

ژمارەی ریزکردنەکان یان ژمارەی گونجێنەکان هەژماربکە.

54 ${}_8P_3$ **55** ${}_9P_7$ **56** $\binom{10}{3}$ **57** $\binom{8}{4}$

ڕوانین بۆ پێشەوە

2π بریتیە لە چێوەی بازنەیەك کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و نیوەتیرەکەی 1 یەکەیە لە ڕووتەختی پۆتاندا. دەتوانی درێژی ئەو کەوانەی کە چەقە گۆشەکەی θ دیاری کردووە بدۆزیتەوە بەم یاسایە. $l=\frac{\theta}{360}\times 2\pi$ ، و درێژی کەوانەکە بە l هێما دەکرێت.



درێژی کەوانەکە هەژماربکە کە هەریەك لەم گۆشانە دیاریدەکات.

58 $\theta=180°$ **59** $\theta=90°$

60 $\theta=360°$ **61** $\theta=45°$

وانەی 2

ڕاستەهێڵەکان و ڕووتەختەکان لە بۆشاییدا Lines and Planes in Space



ئامانجەکان

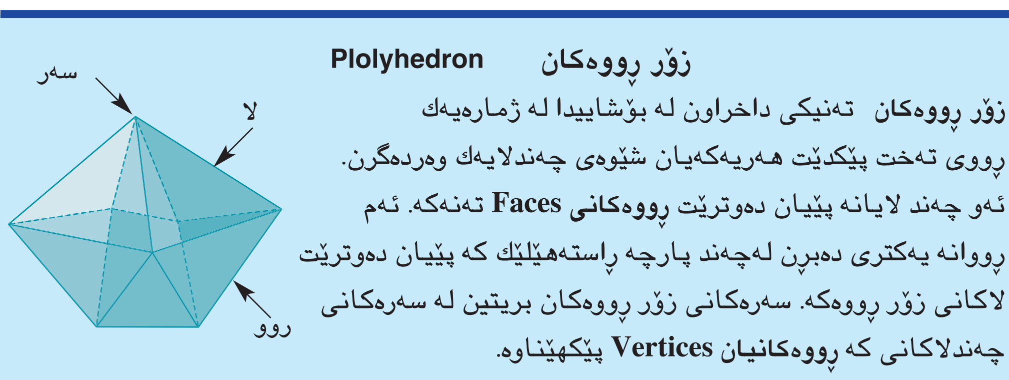
- پەیوەندییەکانی نێوان خاڵەکان و ڕاستەهێڵەکان و ڕووتەختەکان لە بۆشاییدا جیادەکاتەوە.
- گۆشەی دوو ڕووتەخت جیادەکاتەوە.

بۆچی؟

تێبینی تێکهەڵکێشی ڕاستەهێڵەکان و ڕوتەختەکان لە زۆرشتدا دەکەیت هەروەک چۆن دەردەکەوێت لە پارچەکانی کریستاڵدا. هەستکردن بە پەیوەندییەکانی نێوان ڕووتەختەکان و ڕاستەهێڵەکان لە بۆشاییدا بە پێویست دادەنرێت بۆ تێگەیشتنی زۆر لە بنیاتەکانی سروشت.

تەنە ئەندازەییەکان Figures in Space

زۆر ڕووەکان **Polyhedron** تەنێکی داخراوە لەبۆشاییدا و لە ژمارەیەک ڕووی تەخت پێکدێت کە هەریەکەیان شێوەی چەندلایەک وەردەگرێ.



زۆر ڕووەکان Plolyhedron

زۆر ڕووەکان تەنێکی داخراون لە بۆشاییدا لە ژمارەیەک ڕووی تەخت پێکدێت هەریەکەیان شێوەی چەندلایەک وەردەگرن. ئەو چەند لایانە پێیان دەوترێت ڕووەکانی **Faces** تەنەکە. ئەم ڕووانە یەکتری دەبڕن لەچەند پارچە ڕاستەهێڵێک کە پێیان دەوترێت لاکانی زۆر ڕووەکە. سەرەکانی زۆر ڕووەکان بریتین لە سەرەکانی چەندلاکانی کە ڕووەکانیان **Vertices** پێکهێناوە.

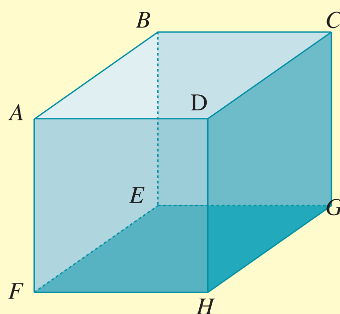
هەندێک ڕوو هەیە لەوانەی تر زۆرتر دەیان ناسی وەک خشتەک (شەشپاڵو)، شەشپاڵۆ تەنێکی بۆشایی گرە شەش ڕوو و 12 لا و 8 سەری هەیە. شەشپاڵوو کە بەسیفەتێکی گرنگ ناسراوە ئەوەش ئەوەیەکە هەموو ڕووەکانی چوارگۆشەی جووتن لەسەریەکتری و هەرسەرێك لە سەرەکانی خاڵی بەیەکگەیشتنی سێ ڕوویەتی و پێی دەوترێت زۆر ڕووی ڕێك **Regular Polyedron**. بەشێوەیەکی گشتی بەزۆر ڕوویەك دەوترێت ڕێك **Regular** ئەگەر هەموو ڕووەکانی چەندلای جووت بن، و هەر سەرێك لە سەرەکانی خاڵی بەیەك گەیشتنی هەمان ژمارەی ڕووەکان بێت.

ڕاستەهێڵەکان و ڕووتەختەکان لە بۆشایی: ڕێگای هەنگاو بە هەنگاو
Lines and Planes in Space: A Step-by-Step Procedure

لەم چالاکییانەی خوارەوە لەمەودوا چەند بۆچوونێك دەدۆزیتەوە لە بارەی پەیوەندیەکانی نێوان ڕووتەختەکان و ڕاستەهێڵەکان لە بۆشاییدا و هەڵدەستێت بە برەوپێدانیان.

چالاکی 1

ڕاستەهێڵ و ڕووتەختە تەریبەکان لەبۆشاییدا
Plane and Parallel Lines in Space



بەشی یەکەم

1. شەشپاڵویەك بکێشە و سەرەکانی ناوبنێ هەروەك ڕوونکراوەتەوە لە شێوەی بەرامبەردا. ناوی لاکانی ستونی شەشپاڵووەکە بنووسە. ئایا وا دەردەکەوێت کە هەردوو ڕاستەهێڵی AE و CG، لەیەك ڕووتەختدابن؟وا دەردەکەون کە تەریبن بەیەکتری؟ ئایا لەو باوەڕەدایت کە ئەم دووڕاستەهێڵە بەیەکبگەن کاتێك درێژبکرێنەوە تاناکۆتا؟

2. کام لە لایەکانی شەشپاڵووەکە تەریبن بەیەکتری؟ — خاڵی چاودێری ✓

3. ئایا لێرەدا لا هەیە تەریب نەبێت لەگەڵ ئەوەی بەیەکتری ناگەن ئەگەر درێژیش بکرێنەوە بۆ ناکوتا؟ هۆیەکەی دیاریبکە. بەم ڕاستەهێڵانەی کە ئەم لایەنە دەنوێنن پێیان دەوترێت تەکولۆ Skew چوار جووت لەو ڕاستەهێڵە تەکولۆیانە دیاربکە لەوێنەکەدا

بەشی دووەم

1. ژمارەی ڕووەکانی شەشپالووەکە چەندن؟ کام لەم ڕووانە تەریبن بەیەکتری؟

2. پێناسەی تایبەتی خۆت بنووسەبۆ ڕووتەختە تەریبەکان.بەتەواوکردنی ئەمڕستەیەی خوارەوە. — خاڵی چاودێری ✓

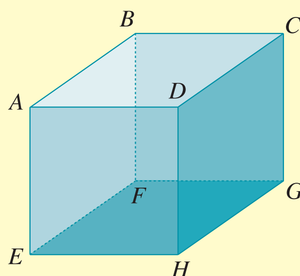
پێناسەی ڕووتەختە تەریبەکان Parallel Planes

دوو ڕووتەخت تەریب دەبن تەنها ئەگەر ___؟___.

تێبینی: دوو شێوەی ئەندازەیی تەریب دەبن، تەنها ئەگەر بکەونە دوو ڕووتەختی تەریب.

چالاکی 2

پارچە ڕاستەهێڵەکان و ڕووتەختەکان
Segments and Plane



بەشی یەکەم

1. هەر ڕاستەهێڵێك لایەك لە لاکانی شەشپالوی بەرامبەر دەنوێنێت ئەستون دەبێت لە سەر دوو ڕووی جیاوازی خشتەکەکە. لیستێك دروست بکە بەو ڕاستەهێڵانەی لاکانی خشتەکەکەیان پێکهێناوە لەگەڵ دیاریکردنی دوو ڕووی ئەستون لەگەڵ هەریەك لەو ڕاستەهێڵانە.

2. که دەڵێین ڕاستەهێڵێك ئەستونە لەگەڵ ڕووتەختێك ئەمە مانای چی دەبەخشێت بۆتۆ؟ ڕاستە هێڵی l لەسەر کاغەزێك بکێشە و خاڵێکی وەك P ی لەسەر دیاربکە. قەڵەمەکە لەسەر ڕووتەختی کاغەزەکە بەستوونی ڕاگرە و سەرەکەی لە خاڵی P بێت. ئایا قەڵەمەکە لەسەر ڕاستەهێڵی l ئەستوون دەبێت.

3. ئایا دەتوانیت قەڵەمەکە لاربکەیتەوە بەمەرجێك هەر ئەستون بێت لەسەر ڕاستەهێڵی l بەبێ ئەوەی ئەستوون بێت لەسەر ڕووتەختی کاغەزەکە؟ وێنەیەك دروست بکە، ئەم وەڵامەت ڕوونبکاتەوە.

4. وێنەی ڕاستەهێڵێکی تازە m بکێشە کە بە خاڵی P دا بڕوات. سەری قەڵەمەکە لەسەر خاڵی P دابنێ، بەمەرجێك قەڵەمەکە ئەستوون بێت لەگەڵ هەریەك لە دوو ڕاستەهێڵی l و m پەیوەندی نێوان قەڵەمەکەو ڕووتەختی کاغەزەکە چ جۆرە پەیوەندیەك دەبێت؟

5. ژمارەیەکی تر ڕاستەهێڵ بکێشە کە بەخاڵی P دابڕۆن. ئەگەر قەڵەمەکە ئەستون بێت لەسەر ڕووتەختی کاغەزەکە، ئایا ئەستون دەبێت لەگەڵ ئەو ڕاستەهێڵانەی کەلەخاڵی P کێشراون.

6. پێناسەی تایبەتی خۆت بنوسە بۆ ڕاستەهێڵی ئەستون لەسەر ڕوووتەخت بە تەواوکردنی ئەم ڕستەیەیی خوارەوە.

خاڵی چاودێری ✔

پێناسە

ڕاستەهێڵێك ئەستون دەبێت لەسەر ڕووتەختێك لە خاڵێك لە خاڵەکانیدا ئەگەرو تەنها ئەگەر ئەستون بێت لەسەر هەموو ئەو ڕاستەهێڵانەی دەکەونەوە ڕووتەختەکەوە و دەڕۆن بە ____؟

بەشی دووەم

ڕاستەهێڵ تەریب دەبێت بەڕووتەختێك ئەگەر نەیبڕێت.

1. هەموو لایەك لە لاکانی شەشپاڵوویەك تەریبە بە دوو ڕوو لە ڕووەکانی شەشپاڵووەکە (سەیری پرسیاری 1 لە بەشی یەکەم بکە) لیستێك دروستبکە بەلاکانی شەشپاڵووەکە، دوو ڕووی تەریبی بەرامبەری هەر لایەك دیاریبکە.

2. ڕاستەهێڵی l لە سەر کاغەزێك بکێشە. قەڵەمەکەت بگرە بەمەرجێك بەرزتربێت لە ڕووتەختی کاغەزەکە و تەریب بێت بەڕاستەهێڵی l. ئایا قەڵەمەکە وا دیاردەبێت کە تەریب بێت بە ڕووتەختی کاغەزەکە؟

3. قەڵەمەکە بسوڕێنە بەمەرجێك هەرتەریب بێت بە ڕووتەختی کاغەزەکە و بێ ئەوەی تەریب بێت بە ڕاستەهێڵی l . ئایا لەو بڕوایە دایت کە لە توانات دا دەبێت ڕاستەهێڵێکی تر بکێشێت لە کاغەزەکەدا بەمەرجێك تەریب بێت بە قەڵەمەکە لەو بارەی تازەیدا؟

4. سیفەتێك لە سیفەتەکانی ڕاستەهێڵی تەریب بە ڕووتەختێك بنووسە بە تەواوکردنی ئەم ڕاستیەی خوارەوە.

خاڵی چاودێری ✔

پێناسە

ڕاستەهێڵێك تەریب دەبێت بەڕووتەختێك نەکەوێتە ناویەوە ئەگەرو تەنها ئەگەر تەریب بێت بە ____؟ بکەوێتە ناو ئەو ڕووتەختە.

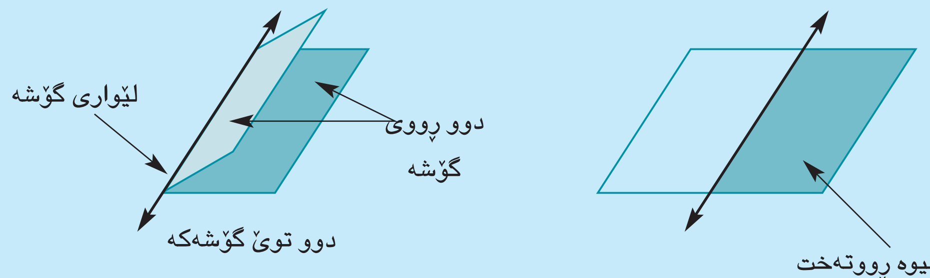
گۆشەی دوو ڕووتەخت — Angles Formed by Planes

هەر ڕاستەهێڵێك بكەوێتە ڕووتەختێكەوە دابەشی دەكات بە دوو بەشەوە هەربەشێكیان پێی دەوترێت نیوە ڕووتەخت و بەو ڕاستەهێڵە دەوترێت لێواری نیوە ڕووتەختەكە.

دوو تویٚ گۆشە Dihedral Angle

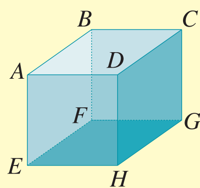
دوو تویٚ گۆشە **Dihedral Angle** بریتییە لەو شێوە بۆشاییەی كە لە دوو نیوە ڕووتەخت پێكدێت كە هەمان لێواریان هەیە.

هەریەك لەدوو نیوە ڕووتەختەكە پێی دەوترێت ڕووی **Face** گۆشەكە و بەلێوارە هاوبەشەكەی نێوانیان دەوترێت لێواری گۆشەكە **Edge of the Angle**.

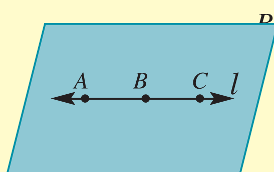


چالاكی 3

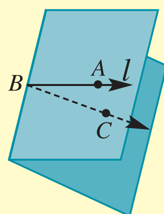
پێوانی دوو تویٚ گۆشە — Measure of a Dihedral Angle



1. هەندێك ڕووەكانی شەشپاڵوو دوو تویٚ گۆشەی وەستاوپێك دێنن (واتە ئەو دوو ڕوووەی ئەستوونن لە سەر یەكتری). هەر ڕوویەك لە ڕووەكانی شەشپاڵووەكە ئەستون دەبێت لەگەڵ ژمارەیەك لە ڕووەكانی تر. ئەو ژمارەیە چەند دەبێت؟



2. ڕاستەهێلێكی ئاسۆیی l لەسەر كاغەزێك بكێشە و لەسەر ئەو ڕاستەهێڵە سیٚ خاڵی A و B و C دیاریبكە بەمەرجێك خاڵی B بكەوێتە نێوان هەردوو خاڵەكەی تر. كاغەزەكە بنوشتێنەوە بە مەرجێك هەردوو نیوەی ڕاستەهێڵی l كە سنوردراوە بەخاڵی B جووتبن، پەیوەندی چییە لەنێوان ڕاستەهێڵی نوشتێنراو و ڕاستەهێڵی l ؟



3. كاغەزەكە لەسەرخۆ بكەوە بۆ ئەوەی دوو تویٚ گۆشەیەكت دەست بكەوێت پێوانەی گۆشەی ABC دادەنرێت بە پێوانەی دوو تویٚ گۆشەكە.

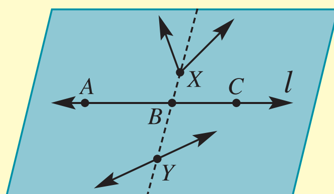
4. پێناسەی تایبەتی خۆت بنووسە بۆ پێوانەی دوو تویٚ گۆشە بە تەواوكردنی ئەم ڕستەیەی خوارەوە.

خاڵی چاودێری ✓

پێوانەی دوو تویٚ گۆشە Measure of a Dihedral Angle

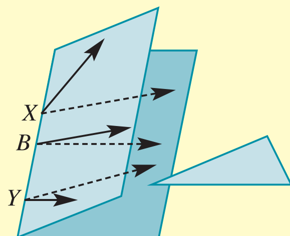
پێوانەی گۆشەیەكە سەرەكەی لەسەر لێواری دووتویٚ گۆشەكە بێت و دوو لاكانی ___؟___ لەگەڵ ئەو لێوارە و هەریەكێكیان بكەونە ڕوویەك لە دوو ڕووی دوو تویٚ گۆشەكەوە.

5. کاغەزەکە بکەوە و ڕایبخە. ڕاستەهێڵێکی نوشتێنراوە بکێشە و دوو خاڵی X و Y لەسەر دیاربکە. لە و دوو خاڵەوە دوو تیشك بکێشە کە هەریەکیان بکەونە لایەکی ڕاستەهێڵە نوشتاوەکەوە هەروەك لە وێنەی بەرامبەر ڕوونکراوەتەوە



خاڵی چاودێری ✓

6. کاغەزەکە جارێکی تر بنوشتینەوە. لە دوایدا پارچە کاغەزەکە بەوردی ببڕە کە بتوانیت بیخەیتە ناو هەموو گۆشە جیاوازەکان کە دروست بووە لە ئەنجامی تیشکە کێشراوەکان، شێوەکانی پارچە کاغەزەکانی دەستت کەوتووە بەراوردبکە. ئایا پێوانەی ئەو گۆشانەی دروستبووە لەئەنجامی کێشانی تیشکەکان یەکسانن بە پێوانەی ABC یان جیاوازە لێی؟



7. ئەو سێ گۆشەیەی لە پرسیاری 6 دەستتکەوتووە پێوانەبکە و پێوانەکانیان بەراوردبکە، کام گۆشەیان بچووکترە ؟ کام گۆشەیان گەورەترە؟ ئەو ئەنجامانە بەکاربهێنە بۆ ئەوەی ڕوونیبکەیتەوە بۆچی دوو تویٚ گۆشە دەپێوریٚ بە پێوانی ئەو گۆشەیەی دوو لاکەی ئەستوونن لەسەر لێواری دوو گۆشەکە.

تێبینی : 1. پێوانەی دوو تویٚ گۆشە یەکسانە بە پێوانەی ڕووە گۆشەکەی

2. ڕووە گۆشە بۆ دوو تویٚ گۆشە ئەو گۆشەیە کەدوو لایەکانی ئەستوونن لەگەڵ لێواری دوو تویٚ گۆشەکەو هەریەکێکیان دەکەونە ڕوویەك لە دوو ڕووەکەیەوە.

ڕاهێـــــنـــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 لە بۆشاییدا ئەگەر دوو ڕاستەهێڵ ئەستوون بن لەسەر ڕاستەهێڵی سێیەم. ئایا ئەو دوو ڕاستەهێڵە بەیەکتر تەریب دەبن؟ هۆی وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

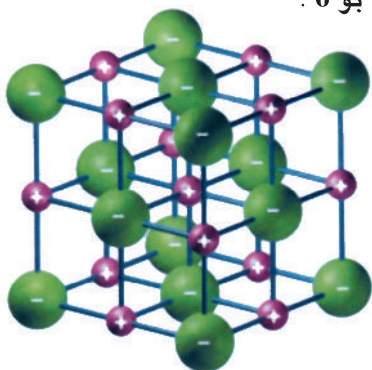
2 ئەگەر ڕاستەهیڵێك بکەوێتە ڕووتەختێك و ئەستون بێت لەسەر ڕاستەهێڵێکی تر کە نەکەوێتە ڕووتەختەکەوە، ئایا ڕاستەهێڵی دووەم ئەستون دەبێت لەسەر ڕووتەختەکە؟ هۆی وەڵامەکەت بنووسە.

3 ئەگەر ڕاستەهێڵێك ئەستوون بێت لە سەر دوو ڕاستەهێڵی یەکتربڕی ناو ڕووتەختێکەوە ئایا ئەستون دەبێت لە سەر ڕووتەختەکەیان؟ هۆی وەڵامەکەت دیاربکە

جێبەجێکردنەکان

کیمیا

ئەو شێوەیەی بەرامبەر پێکهاتەی سێجایی نموونەی کریستاڵی کلۆریدی سۆدیۆم ڕووندەکاتەوە. خاڵەکانی یەکتربڕینی ئەو پارچە ڕاستەهێڵانەی کە دەیبینیت ناویان لێبنیٚ و بەکاریان بهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 4 بۆ 6 .



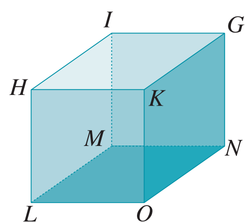
4 دوو پارچە ڕاستەهێڵی تەریب بەیەکتر دیاربکە. و هۆی تەریب بوونەکەیان ڕوونبکەوە.

5 دوو ڕووتەختی تەریب بەیەکتر دیاربکە. هۆی تەریب بونەکەیان ڕوونبکەرەوە.

6 دوو ڕووتەختی ئەستوون دیاربکە، هۆی ئەستوون بوونەکەیان ڕوونبکەوە.

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

وێنەی ئەم خشتەکەی بەرامبەرت بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 7 تا 11



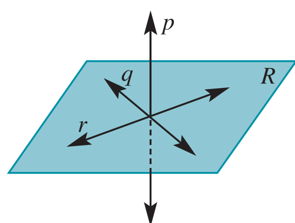
7 دوو جووت لە لاتەریبەکان دیاربکە

8 دوو جووت لە لا تەکولۆکان دیاربکە

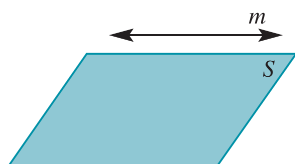
9 دوو جووت لە ڕووە تەریبەکان دیاربکە

10 دووڵا دەستنیشانبکە و ئەو ڕووختەتە دیاریبکە کە ئەستون لەسەر هەر یەکێکیان.

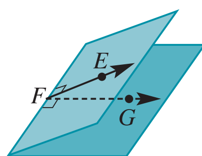
11 دوو جووت لەلاتەریبەکان دیاربکە کە ناکەونە ناو یەك ڕووەوە.



12 ڕاستەهێڵی p لە وێنەی بەرامبەر ئەستونە لەسەر ڕووتەختی R پەیوندی نێوان ڕاستەهێڵی p و ڕاستەهێڵی q و هەروەها نێوان ڕاستەهێڵی p و ڕاستەهێڵی r چییە؟

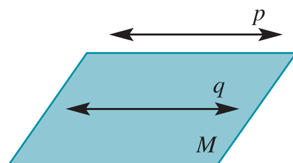


13 لە وێنەی بەرامبەر ڕاستەهێڵی m تەریبە بە ڕووتەختی S، پەیوەندی نێوان ڕاستەهێڵی l و ئەو ڕاستەهێڵەی دەکەوێتە ڕووتەختی S و چییە؟

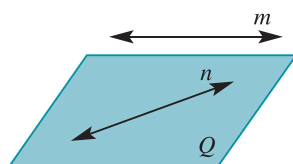


14 لە وێنەی بەرامبەردا پێوانەی دوو توێ گۆشەکە چەندە؟

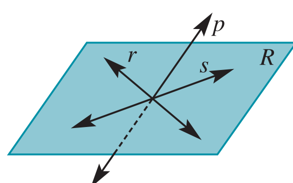
ڕاهێنان و جێبەجێکردن



15 لە وێنەی بەرامبەردا ڕاستەهێڵی p تەریبە بەڕاستەهێڵی q پەیوەندی چییە لە نێوان ڕاستەهێڵی p و ڕووتەختی M



16 لە وێنەی بەرامبەر ڕاستەهێڵی m تەریب نییە بە ڕاستەهیڵی n. چی دەڵێیت بە پەیوەندی نێوان ڕاستەهێڵی m و ڕووتەختی Q ؟ ڕوونیبکەوە.



17 لە وێنەی بەرامبەردا ڕاستەهێڵی p ئەستوونە لەسەر ڕاستەهێڵی r و ئەستوون نیە لەسەر ڕاستەهێڵی s چی دەڵێیت بە پەیوەندی نێوان ڕاستەهێڵی p و ڕووتەختی R ؟

ئایا ئەم ڕستانە لە هەر پرسیارێك لە پرسیارەکانی 18–22 ڕاستن یا هەڵەن؟ بۆچونەکانت بە وێنە ڕوونبکەرەوە.

18 ئەگەر دوو ڕاستەهێڵ تەریب بن بە ڕاستەهێڵی سێیەم ئەوا خۆشیان تەریب دەبن.

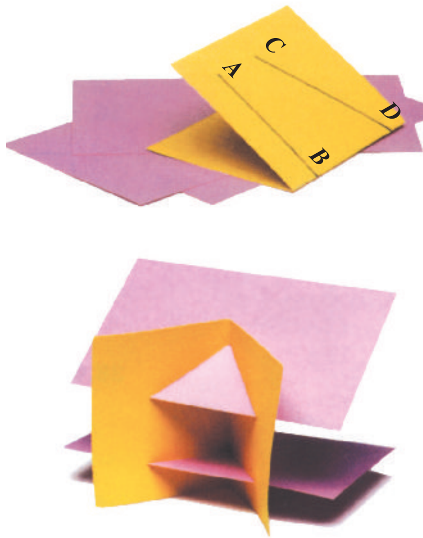
19 ئەگەر دوو ڕووتەخت تەریب بن بە ڕووتەختی سێیەم ئەوا خۆشیان تەریب دەبن.

20 ئەگەر دوو ڕووتەخت ئەستون بن لەگەڵ ڕووتەختی سێیەم ئەوا خۆشیان تەریب دەبن.

21 ئەگەر دوو ڕووتەخت ئەستون بن لەگەڵ ڕاستەهێڵێك ئەوا خۆشیان تەریب دەبن.

22 ئەگەر دوو ڕاستەهێڵ ئەستون بن لەگەڵ ڕووتەختێك ئەوا خۆشیان تەریب دەبن.

ئەو نموونەیەی کە دروستی دەکەیت بە پێی ڕێنمایەکان لە پرسیاری 23 بەکاریبهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 24 تا 26 .



23 پارچە کارتۆنێکی لاکێشەیی بنوشتینەوە، لەسەر یەکێك لە دوو بەشەکەی، دوو ڕاستەهێڵی AB و CD بکێشە بە مەرجێك AB ئەستون بێت لەسەر هێڵە نوشتاوەکە، ڕاستەهێڵی CD ئەستون نەبێت لەسەر هێڵە نوشتاوەکە پارچەیەك ببڕە بە پێی دوو ڕاستەهێڵەکە و دەستپێبکە لە هێڵی نوشتانەوەکە. ئەو دوو پارچە بڕاوەی کە دروستت کردن بخەرە ناوەوە بۆ دروست کردنی نموونەیەك.

24 لە دوو پارچە بڕاوەکە کامەیان ئەستون نییە لە سەر هێڵی نوشتێنراوە؟

25 لە دوو پارچە بڕاوەکەی خراوتە نێوانەکەوە کامەیان دەتوانرێ بەکاربهێنرێت بۆ پێوانی دوو توێ گۆشەکە؟

26 کام لە دوو توێ گۆشەکە کە سنووردراوە بە دووپارچەکانی دانراو گەورەترین پێوانەی هەیە؟



ڕوانین بۆ دواوە

پرگاڵ و ڕاستە بەکاربهێنە بۆ کێشانی وێنەکان لە پرسیارەکانی 27 بۆ 30 .

27 گۆشەی ABC بکێشە و لە دواییدا کۆپیەکی وەک خۆی دروستبکە.

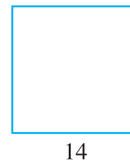
28 پارچە ڕاستەهێڵێك بکێشە و لە دواییدا تەوەرەکەی دروستبکە.

29 ڕاستەهێڵی FG و خاڵی H کە دەکەوێتە دەرەوەی بکێشە. ئەو ڕاستەهێڵە دروستبکە کە بەخاڵی H دادەڕوات و تەریبە بە ڕاستەهێڵی FG .

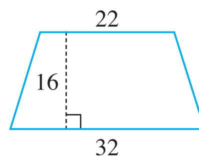
30 سێگۆشەیەك بکێشە لە دواییدا کۆپیەکی وەك خۆی دروستبکە.

ڕووبەری ئەم چەندلایانە هەژماربکە:

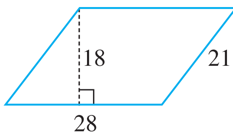
31 چوارگۆشە



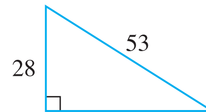
32 نیمچە لاتەریب



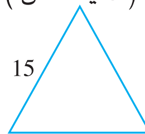
33 لاتەریب



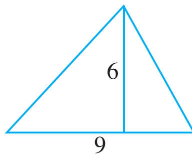
34 سیگۆشەی وەستاو



35 سیگۆشەی ڕێك (لا یەکسان)



36 سیگۆشەی جیالا

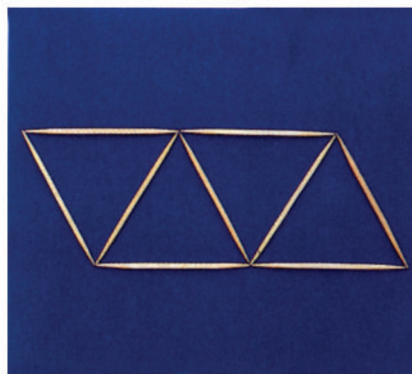


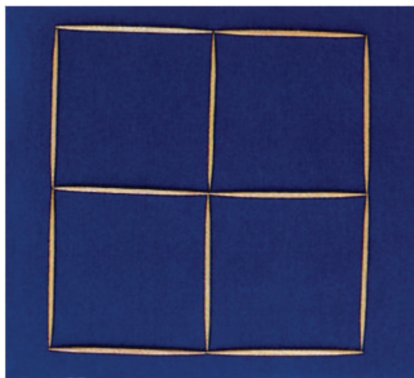
ڕوانین بۆ پێشەوە

بەرەنگاری

37 تەنها دوو دەنکە شقارتە بجوڵێنە لەم وێنەیەی خوارەوە بۆ ئەوەی وێنەیەکت دەستکەوێت تەنها سێ سێگۆشەی تێدابێت.

38 تەنها سێ دەنکە شقارتە بجوڵێنە لەم وێنەیەی خوارەوە بۆ ئەوەی وێنەیەکت دەستدەکەوێت تەنها سێ سێگۆشەی تێدابێت.





وانەی 3

وێنە بینراوەکان Perspective Drawing

ئامانجەکان

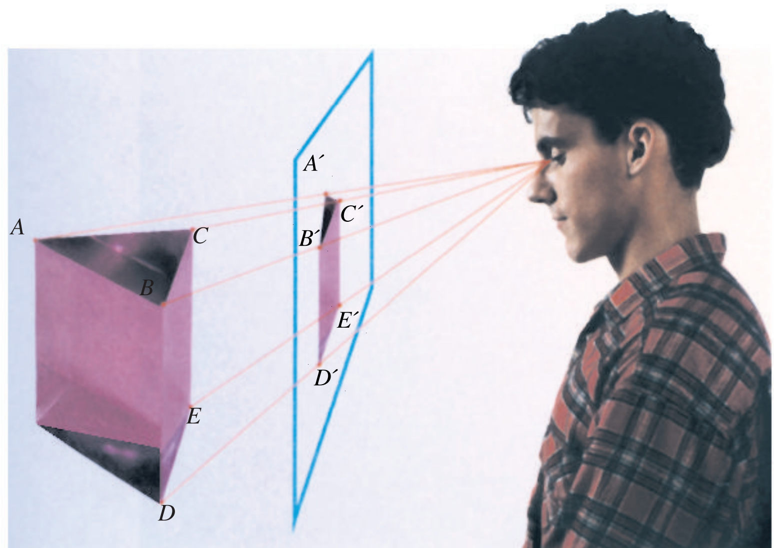
- چەمکە بنەڕەتییەکانی وێنە بینراوەکان دەناسێت.
- ئەو چەمکانە بۆ کێشانی وێنە بینراوەکان بەکاردەهێنێت.



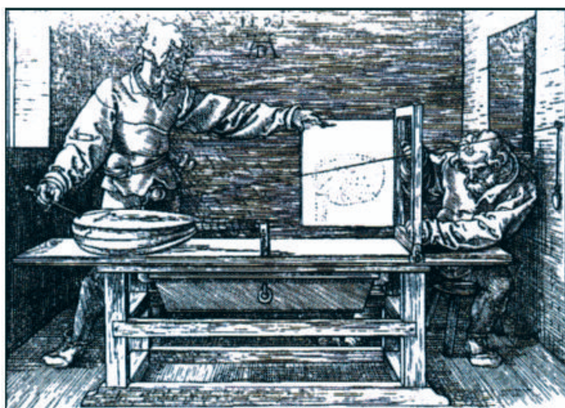
هونەرمەندە ئەورووپییەکان لە چەرخی سەرهەڵدان، لە نێوان هەردوو سەدەی چواردە و شازدەی زاینی گەڕانەوە بۆ دواوە و دۆزیانەوە چۆن هەستێکی قوڵ لە وێنەکان و تابلۆ هونەرییەکان پەیدابکەن. بە دەستپێکردن لەکارە هونەرییە کلاسیکیەکانی یۆنان و ڕۆمان. دەتوانیت تێبینی ئەوە بکەیت چۆن کارەکانی پێشوو لەسەردەمی ڕاپەڕین دەردەکەوێت (لە وێنەی لای ڕاست) بەبەراوردکردن لەگەڵ تابلۆکانی ئەم سەردەمە(لە وێنەکەی لای چەپ).

وێنەی بینراو: پەنجەرەیەك لەسەر ژیانی ڕۆژانە Windows to Reality

ڕێگاکانی وێنە بینراوەکانی نوێ لە سەردەستی تەلارسازی ئیتاڵی فلیب برنولیتشی دۆزرایەوە (1377- 1466م). ئەم ڕێگایانە پشت دەبەستن بە بیرۆکەیەکی بنەڕەتی ئەویش بریتییە لەوەی کە وێنە وەك پەنجەرە وایە. ئەو هونەرمەندەی هەوڵدەدات تابلۆیەك بکێشێت یان ئەو کەسەی سەیری تابلۆیەکی هونەری ئامادەکراو دەکات، لە ڕێگای وێنەکە شتە ڕاستەقینەکان ببینێت کە تابلۆکە دەینوێنێت. کاتێك کەسێك دەڕوانێتە شتێك هێڵەکانی بینینی خەیاڵی دادەنێت، کە چاو و هەموو خاڵە جیاوازەکانی ئەو شتەی پێکهێناوە بەیەکەوە دەبەستیت. وادابنێ لێرەدا ڕووتەختێك هەیە (شووشە) بکەوێتە نێوان چاوی بینەرو ئەو شتەی سەیری دەکات. هەموو هێڵەکانی ڕوانینی ئەم ڕووتەختە بریتییە لەو خاڵانەی کە وێنەی شتەکە پێکدێنێت. وا دەردەکەوێت هەر وەکو جێکەوتەکەی بێت لەسەر ڕووتەختەکە، بۆیە دەتوانین بڵێین وێنەی شتێك بریتیە لە جێکەوتەکەی لە سەر ڕووتەختی وێنەکە **Picture Plane**



پەنجەرەی ڕووتەختی وێنەکە جێکەوتی ئەوەی دەیبینیت لە خۆدەگرێت



هونەرمەندی ئەڵمانی ئەلبەرت دو سەردانی ئیتاڵیای کرد بۆ فێربوونی تەکنیکی وێنە بینراوەکان لەدوایيدا وێنەی کۆمەڵێك کاری هونەری کێشا کە هونەرمەندەکان ئەم جۆرە تەکنیکەیان تێدا بەکارهێناوە هەروەك لە تابلۆیەی بەرامبەردا دەردەکەوێت.

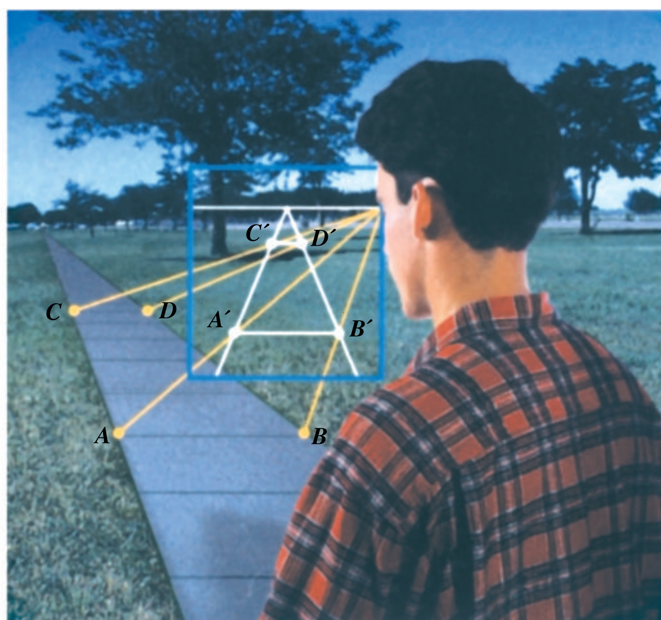
خاڵی چاودێری ✔ سەیری تابلۆکەی (دورر) لەسەرەوە بکە و باسیبکە چۆن هونەرمەند ئەو تەکنیکەی بەکارهێناوە بۆ ڕوونکردنەوەی جێکەوتی شتێك لەسەر ڕووتەختی وێنەکە.

هێڵە تەریبیەکان و خاڵی پوکانەوە Parallel Lines and Vanishing Points



ئایا سەرنجت داوە کە دوولای هێڵی ئاسن یان دوولای ڕێگایەکی درێژی ڕاست وا دەردەکەون کە لە دوور بەیەکتری دەگەن؟ ئەو خاڵەی کەوا دەردەکەوێت ئەو هێڵانەی تێدا بەیەك دەگەن هەمیشە لە ئاسۆدا دەبن پێی دەوترێت خاڵی پوکانەوە لە وێنە بینراوەکاندا

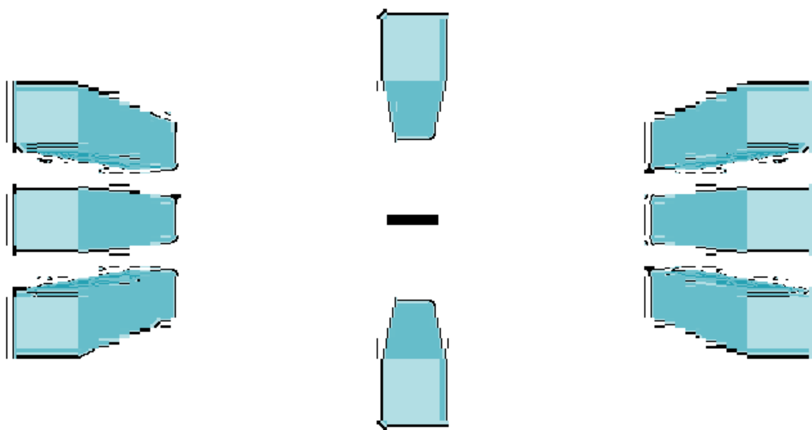
بۆ هەردوو پارچە ڕاستەهێڵی AB، CD هەروەك دەردەکەون لە وێنەکەی خوارەوەدا لە ڕاستیدا یەك درێژیان هەیە کاتێك بینەر ئەمانە دەخاتە سەر ڕووتەختی وێنەیەك شێوەی $\overline{AB}$ وا دەردەکەوێت درێژترە لە شێوەی $\overline{CD}$.



ئەم دوو پڕێسایەی لەم وانەدا دێت دەبێتە بنچینە بۆ تێگەیشتنی چەمکەکانی وێنە بینراوەکان. دەتوانرێت راستی ئەم دوو پڕێسایە بسەلمێنین بە خوێندنی ئەو ڕێگایەی کە بە هۆیەوە جێکەوتی هێڵە تەریبەکان لە سەر ڕووتەختی وێنەکە لە وێنە بینراوەکە دەهێنرێتەدی.

پڕێسای 1 : کۆمەڵەکانی هێڵە تەریبەکان Principle 1: Sets of Parallel Lines

لەوێنەی بینراودا هەموو ڕاستەهێڵە تەریبەکان، ئەوانەی تەریب نین بە ڕووتەختی وێنەکە، لە یەک خاڵدا بەیەک دەگەن کە پێی دەوترێت خاڵی پوکانەوە.



خاڵی چاودێری ✔ ئایا لەوباوەڕەدای کە ئەو خاڵەی وا دەردەکەوێت کە هەموو ڕاستەهێڵە تەریبەکان لەویدا بەیەکدەگەن پێویستە لە وێنەکەدا بێت؟ وێنەیەک بەکاربهێنە بۆ ڕوونکردنەوەی ئەوە.

پڕێسای 2 : هێڵەکانی تەریب بە زەوی Principle 2: Lines Parallel to the Ground

لە وێنەی بینراودا، هەر ڕاستەهێڵێك بکەوێتە ڕووتەختی زەوی و تەریب نەبێت بە ڕووتەختی وێنەکە، بە هێڵی ئاسۆ دەگات لە خاڵێکدا، هەر ڕاستەهێڵێك تەریب بێت پێی لە هەمان خاڵدا بە هێڵی ئاسۆ دەگات.



خاڵی چاودێری ✔ ڕاستەهێڵە تەریبەکانی ئەوانەی تەریبن بە ڕووتەختی وێنەکە لە وێنەی بینراودا، هەمیشە دەکێشرێن بە بێ خاڵی پوکانەوە. لە زۆر باردا دووروکەوتنەوە لەوە کێشە دروست دەکات. ئایا دەتوانیت باسی چەند بارێك بکەیت کە ئەم تەکنیکە وێنەیەکی ڕاستەقینەمان نادات؟

خاڵی چاودێری ✔

دەتوانرێ بیرۆکەی خاڵی پوکانەوە لە وێنەی بینراودا پەیڕەو بکرێت هەرچەند ئەو ڕاستەهێڵە تەریبە دەرکەوتووەکان لە وێنەکەشدا دەرنەکەون. لە ڕیزکردنی سێڵە وەرگرەکان (الصحون اللاقطة)کە لەخوارەوە ڕوونکراوەتەوە ڕاستەهێڵە خەیاڵیەکان بەو خاڵانەدا دەڕۆن کە کەوتونەتە سەرو بنی سێڵەکان. ئەو ڕاستەهێڵانە لە ئاسۆدا بەیەك دەگەن.هۆیەکەی ڕوونبکەوە.



ئەندازەی تەلارسازی لە بیرۆکەی وێنە بینراوەکان سوودی زۆری بینیوە و بابەتە سەرەتاییەکانی لێ پێکهێناوە. خانووەکان و تەلارەکان جوانترین نموونەن بۆ برەوپێدانی بیرۆکەی وێنە بینراوەکان لە بەر ئەوەی زۆر ڕاستەهێڵی تەریبی تێدایە کە لە ناوخۆیاندا تەریبن بەیەکتری و تەریبن بە زەوی.

ڕاهێـــــــــنـــــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 مانای خاڵی پوکانەوە لە وێنەی بینراودا چی دەگەیێنێت؟

2 ئەو ڕاستەهێڵەی بکەوێتە ڕووتەختی زەوی و تەریب نەبێت بە ڕووتەختی وێنەکە، بۆچی لە ئاسۆدا کۆتایی دێت. وێنەیەك بکێشە وەڵامەکەت ڕوونبکاتەوە.



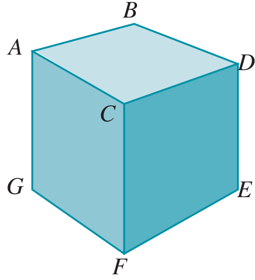
3 وێنەکانی تەلارەکان و خانووەکان بۆچی بە جوانترین نموونە دادەنرێن بۆ پەیرەوکردنی چەمکی وێنەی بینراو؟ وێنەیەك دروستبکە بۆ ڕوونکردنەوەی وەڵامەکەت

4 ئاسۆ لە وێنەی بینراودا بە ڕاستەهێڵێکی ئاسۆیی دەنوێنرێ کە لە ئاستی چاودا بێت، ئەم گریمانە بە بۆچوونی تۆ بۆ وا دانراوە؟

خاڵی چاودێری ✔

5 ئەو دوو ورچەی لە وێنەکەدا دەرکەوتوون هەمان درێژیان هەیە.بەڵام یەکێکیان درێژتر دەردەکەوێت لەوی تریان هۆیەکەی دیاربکە؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو



6 وێنەی بەرامبەر وێنەیەکی بینراوە بۆ شەشپاڵویەك دەربارەی ئەو ڕاستەهێڵانە AB، CD، EF چی دەڵێیت؟ و بەڕاستەهێڵەکانی AC، BD، GF دەڵێین چی؟

7 ڕاستەهێڵە ستوونییەکان لە وێنەی شەشپاڵوەکەی بەرامبەردا لە خاڵی پۆکانەوە بەیەکناگەن. هۆیەکەی دیاریبکە بە بەکارهێنانی ڕێسابینراوەکان.

8 واداینێ وێنەی شەشپاڵوەکەی پێشو خانوویەك بنوێنی لەسەر ڕووتەختی زەوی ئەو ڕاستەهێڵانەی کە لێوارە ناستوونیەکانی خانوەکە دەنوێنن لە کوێ بەیەکدەگەن.

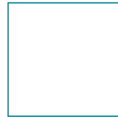
ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئەم پرسیارانەی لەخوارەوە هاتوون ئەو هەنگاوانەی پێویستە بەکاربێت بۆ تەواوکردنی نموونە جۆرەوجۆرەکان لەوێنەی بینراو ڕوونددەکاتەوە.

9 ئەو وێنە بینراوەی کە یەك خاڵی پوکانەوەی هەبێت پێی دەوترێت وێنەیەك کە یەك پوکانەوەی هەیە.

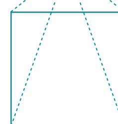
أ چوارگۆشەیەك بکێشە لە دوایدا ڕاستەهێڵێکی ئاسۆیی بکێشە ئاسۆ بنوێنێت. خاڵی پوکانەوەی لەسەر دیاریبکە.





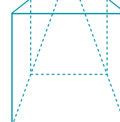
ب ڕاستەهێڵێکی خاڵدار و باریك بکێشە لە نێوان هەر سەرێك لەسەرەکانی چوارگۆشەکە و خاڵی پوکانەوە.



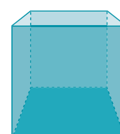


ج چوارگۆشەیەکی خاڵدار بچووکتر لە چوارگۆشەی یەکەم بکێشە سەرەکانی بکەوێتە سەر ڕاستەهێڵەکان کە کێشاوتن لە (ب)وە.





د لە وێنەکەدا هەموو ئەوانەی دەکەونە پشت چوارگۆشە بچوکەکە لاببە، ڕاستەهێڵەکانی خاڵدار کە لە وێنەکەدا دەمێنێتەوە ئاماژە دەکەن بۆ ئەو لێوارانەی کە نابینرێن .

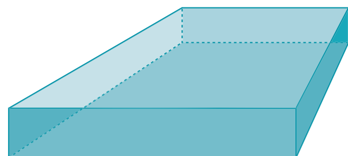


10 هەنگاوەکانی پرسیاری 9 دووبارە بکەرەوە لەگەڵ دانانی خاڵی پوکانەوە بۆ لای چەپی یان لای ڕاستی چوارگۆشەکە.

11 هەنگاوەکانی پرسیاری 9 دووبارە بکەرەوە لەگەڵ دانانی هێڵی ئاسۆ و خاڵی پوکانەوە لە ژێر چوارگۆشەکەدا

12 چی ڕوودەدات ئەگەر خاڵی پوکانەوە لە ناو چوارگۆشەکە یان لە سەر یەکێك لەلاکانی بێت

ئەم وێنەی خوارەوە دروست بکە لە سەر کاغەزێك بۆ شیکارکردنی هەردوو پرسیاری 13 ، 14 .

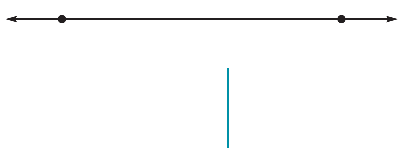


13 خاڵی پوکانەوە لە وێنەکەدا دیاریبکە.

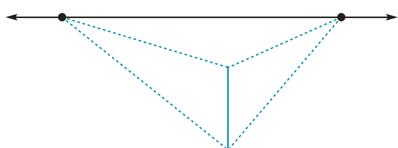
14 هێڵی ئاسۆ بکێشە

15 ئەو وێنە بینراوەی کە دوو خاڵی پوکانەوەی هەیە پێیدەوترێت وێنەیە بە دووخاڵی پوکانەوە.

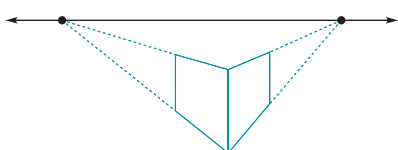
أ پارچە ڕاستەهێڵێکی ستونی بکێشە کە لای پێشەوەی شەشپاڵویەك بنوێنێ. هێلێکی ئاسۆیی لەسەر ئەو پارچەیە بکێشە و دوو خاڵی پوکانەوە بکەونە هەردوو لای پارچە ڕاستەهێڵەکەوە هەڵبژێرە، هەروەك چۆن لە وێنەی بەرامبەردا ڕوونکراوەتەوە



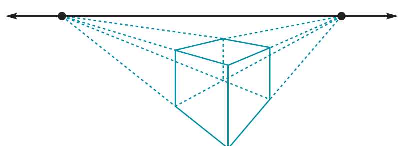
ب ڕاستەهێڵەکانی خاڵدار و باریك کە هەردوو لای پارچە ستونەکە لەگەڵ هەردوو خاڵی پوکانەوە دەگەیەنێت بکێشە هەروەك لەم وێنەدا ڕوونکراوەتەوە.



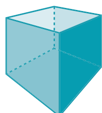
ج پارچە ڕاستەهێڵە ستونیەکان کە لایەکانی ڕووەکانی پێشەوەی شەشپاڵوەکە پێکدێنن بکێشە.



د پارچە ڕاستەهێڵێکی باریك و خاڵدار بکێشە کە لاکانی پارچەکانی کە وێنەت کێشاوە لە ج دا لەگەڵ هەردوو خاڵی پوکانەوە دەگەیەنێت . پارچەیەکی ستونی خاڵدار بکێشە کە هەردوو خاڵی بەیەك گەیشتنی ڕاستەهێڵەکانی وێنەی بینراو کۆ دەکاتەوە



هـ هەموو ئەوشتانەی کەوتونەتە دەرەوەی لێوارەکانی شەشپاڵوەکە لاببە پارچە ڕاستەهێڵەکانی خاڵدار بەکاربهێنە بۆ لایە نەبینراوەکانی شەشپاڵوەکە.



16 هەنگاوەکانی پرسیاری 15 دووبارە بکەوە لەگەڵ دانانی هێڵی ئاسۆ، و دوو خاڵی پوکانەوە لە ژێر پارچە ستونیەکەدا.

17 هەنگاوەکانی پرسیاری 15 دووبارە بکەرەوە لەگەڵ دانانی هیڵی ئاسۆ، بەڕێگایەك کە لەگەڵ پارچە ڕاستەهێڵە ستونیەکە بەیەکبگەن.

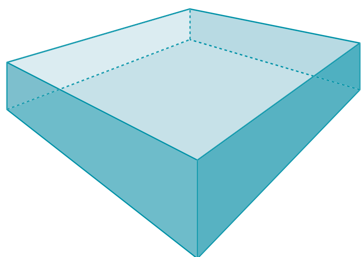
18 چی ڕوودەدات کە وێنەیەك دوو خاڵی پوکانەوەی هەبێت ئەگەر ئەو دوو خاڵە نزیککەوتنەوە؟ ئەگەر دورکەوتنەوە؟

19 چی ڕوودەدات لە وێنەیەك کە دوو خاڵی پوکانەوەی هەبێت کاتێك ئەو دوو خاڵە لە هەمان ڕووی پارچە ڕاستەهێڵە ستوونیەکەبن.

ئەم وێنەی خوارەوە لە سەر کاغەزێك بکێشە بۆ شیکاری هەردوو پرسیاری 20، 21 .

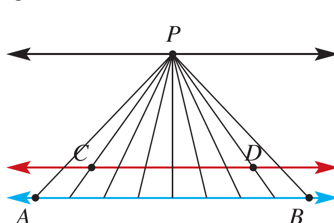
20 دوو خاڵی پوکانەوە لەم وێنەدا دیاریبکە.

21 هێڵی ئاسۆ بکێشە

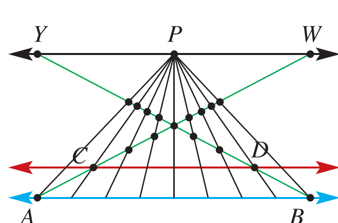


نەخشە ڕێژکردن و نەخشاندنی نیگاری کارێکی سەرنج ڕاکێشن بۆ هونەرمەندان و وێنەکێشان ئەوانەی دەستیان کردوە بە خوێندنی وێنە بینراوەکان. ئەم وێنانەی خوارەوە بە تەکنیکێکی دیاریکراو بۆ دەستکەوتنی شێوەی نەخشەڕێژی ڕیزکراو لە کرداری وێنەی بینراو دەنوێنێ. لەم وێنانەی خوارەوە وردبەرەوە بۆ شیکاری پرسیاری 22 بۆ 23 .

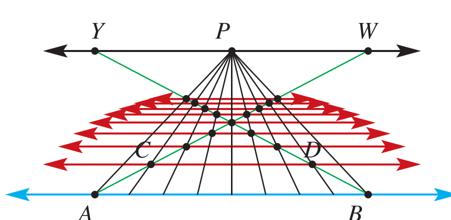
أ



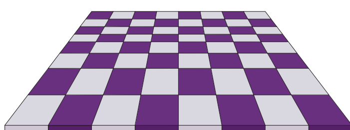
ب



ج



د



22 دەتوانیت هەردوو تیرەی $\overleftrightarrow{AW}$ ، $\overleftrightarrow{BY}$ بەکاربهێنیت بۆ دۆزینەوە ئەو ڕاستەهێڵانەی تەریبن بە ڕاستەهێڵی AB چۆن ئەو دوو تیرەیە بەکاردەهێنیت بۆ دیاریکردنی ئەو ڕاستەهێڵانە؟

23 چۆن دەتوانرێ شێوەی نەخشەڕێژی ببینیت لە گۆشەیەك لە گۆشەکانەوە بەبەکارهێنانی دوو خاڵی پوکانەوە؟ چۆن ڕاستەهێڵەکانی یەکتربڕ دیاری دەکەیت؟

24 نواندنی تایبەتی خۆت دروستبکە کاتێ یەك خاڵی پوکانەوە یان دوو خاڵی پوکانەوە بەکاربهێنیت بۆ نەخشەڕێژی چوارگۆشەکە.

ڕوانین بۆ دواوە

لەهەریەك لەم پرسیارانەی خوارەوە ئایا دوو ڕاستەهێڵەکە تەریبن یان ئەستونن لەسەر یەکتری یان چ جۆریکی ترن.

25 $y = 3x + 5$
$y = 3x - 7$

26 $y = x + 2$
$y = 2 - x$

27 $y = 2x - 1$
$y = -2x + 4$

28 $2x + 3y = 6$
$3x - 2y = 6$

29 $ABCD$ لاکێشەیەکە $\overline{AC}$ ، $\overline{BD}$ دووتیرەکەیەتی، بسەلمێنە کە دوو سێگۆشەی ACD و BCD جووتن.

وانەی 4

چەندلا ڕێکەکان Regular Polygons



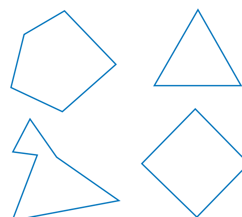
بۆچی؟ هەرچۆنیك بڕوانیتە ئیشە دەستیەکان لە دەوروبەرتدا چەندلاکانت بەرچاو دەکەوێت تیگەیشتن لە سیفەتە بیرکاریەکانی چەندلاکان یارمەتیت دەدات بۆ بەکارهێنانیان لەکارە هونەریەکان و کردارییەکاندا

ئامانجەکان

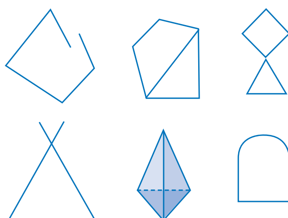
- چەندلاکان جیادەکاتەوە و ناویانلێدەنێت.
- چەندلاڕێکەکان و دانەکانیان جیادەکاتەوە.
- گۆشەکانی ناوەوە و چەقە گۆشەکان و ڕووبەرەکانیان هەژماردەکات.

چەندلاکان Defining Polygons

سەرەنجی ئەم وێنانەی خوارەوە بدە و پێناسەیەك بۆ هەرچەندلایەکیان هەڵبژێرە.



ئەم شێوانە چەندلان



ئەم شێوانە چەندلانین

ئەو پێناسەی کە هەڵتبژاردبوو بۆ چەندلا لەگەڵ ئەم پێناسەی خوارەوە بەراوردی بکە ئایا پێناسەکەت وەك ئەو پێناسەی خوارەوەیە؟ ئایا پێدراوی زیاتری تێدایە؟

چەندلا Polygon

چەندلا شێویەکی ئەندازەیی ڕووتەختە لە سێ پارچە ڕاستەهێڵ یان زیاتر پێکدێت بە جۆرێك هەریەکێکیان لەگەڵ تەنها دوانی تریان یەکتردەبڕن، هەریەکی لە کۆتایی لایەکیدا ببڕێت. بە مەرجێك دووپارچەڕاستەهێڵی یەك بەدوای یەك لە ڕێکی یەکتر نەبن، پارچە ڕاستە هێڵەکان پێیان دەڵێین **لاکانی Sides** چەندەلایەکەو خاڵەکانی یەکتربڕین پێیان دەڵێین **سەرەکانی** چەندلاکە **Vertices** .

ناوی جیاواز لە چەندلاکان دەنرێن. بەپێی ژمارەی لایەکانی. ڕاهێنانبکە لەسەر ناولێنانی ئەو چەندلایانەی لە خشتەی خوارەوە داهاتوون.

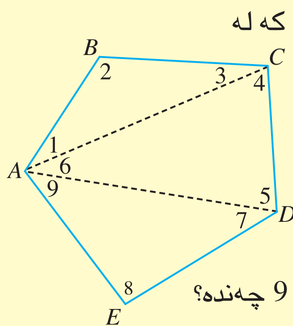
پۆلینکردنی چەندلایەکان بەپێی ژمارەی لایەکانی

ناو		ژمارەی لاکان	ناو		ژمارەی لاکان
سێگۆشە (سێلا)	Triangle	3	نۆلا	Nonagon	9
چوارلا	Quadrilateral	4	دەلا	Decagon	10
پێنجلا	Pentagon	5	یازدەلا	11-gon	11
شەشلا	Hexagon	6	دوازدەلا	Dodecagon	12
حەفتلا	Heptagon	7	سێزدەلا	13-gon	13
هەشتلا	Octagon	8	نون لا	n-gon	n

گۆشەکانی چەندلا — Angles of a Polygon

چالاکی 1

سەرجەمی گۆشەکانی ناوەوە — Angles of a Polygon



پێنجلای بەرامبەر بۆ سێ سێگۆشە دابەشکرا بە کێشانی ئەو تیرانە کە لە یەکێك لە سەرەکانیەوە دەرچووە.

1. سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی 1 و 2 و 3 چەندە؟
2. سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی 4 و 5 و 6 چەندە؟
3. سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی 7 و 8 و 9 چەندە؟
4. سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی 1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6 و 7 و 8 و 9 چەندە؟
5. لە پرسیارەکانی پێشوو سەرجەمی گۆشەکانی ناوەوەی پێنج لا دەرئەنجام بکە.
6. ڕێگای پێشوو بۆ تەواوکردنی ئەم خشتەیەی خوارەوە بەکاربهێنە.

چەندلا	ژمارەی لاکان	ژمارەی سێگۆشەکان	سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوە
سێگۆشە (سێلا)	؟	I	180 پلە
چوارلا	؟	؟	؟
پێنج لا	؟	3	540 پلە
شەش لا	؟	؟	؟
چەندلای نونی	؟	؟	؟

7. ڕێسایەك بنووسە بۆ هەژمێرکردنی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەك بەپێی ژمارەی لایەکانی ئەم ڕێسایەی خوارەوە تەواوبکە:

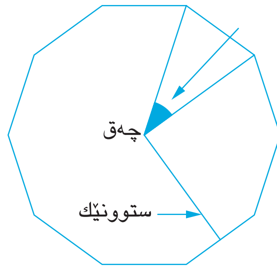
خاڵی چاودێری ✔

سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەك Sum of the Interior Angles of a Polygon

سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەك کە ژمارەی لایەکانی n بێت بریتییە لە ___؟___ پلە.

خاڵی چاودێری ✔

بەچەند لایەك دەڵێین ڕێك **Regular** ئەگەر لایەکانی لە درێژیدا یەکسانبن و گۆشەکانی ناوەوەی لە پێوانەدا یەکسانبن. چەندلای ڕێکی سێلا بریتیە لە سێگۆشەیەکی ڕێك. و چەندلایەکی ڕێکی چوارلا بریتییە لە چوارگۆشە.



چەقی چەندلای ڕێك ئەو خاڵەیە کە بەیەکسانی دوورە لە هەموو سەرەکانییەوە، ئەو گۆشەیەی کە سەرەکەی لەچەقی چەندلا ڕێکەکەدایەوە و دوولاکانی بە دوو سەری هاوسێ لە سەرەکانیدا دەڕوات پێی دەوترێت **چەقە گۆشە Central Angle** بۆ چەندلا ڕێکەکە. هەمووچەقە گۆشەکانی چەندلایەکی ڕێك یەکسانن.

ئەم خشتەیەی خوارەوە تەواوبکە لە دواییدا ئەو ڕێسایەی کە لەدواوەی دێت تەواوبکە

چەند لایەکی ڕێك	ژمارەی لاکان	سەرجەمی گۆشەکانی ناوەوە	پێوانەی هەر گۆشەیەکی ناوەوە
سێگۆشە (سێلا)	؟	180 پلە	؟
چوارلا	؟	؟	90 پلە
پێنجلا	؟	؟	؟
شەشلا	؟	؟	؟
چەند لای نونی	؟	؟	؟

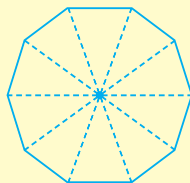
پێوانەی گۆشەی ناوەوەی چەندلای ڕێك

The Measure of an Interior Angle of a Regular Polygon

پێوانەی هەرگۆشەیەکی ناوەوە بۆچەندلایەکی ڕێك ژمارەی لاکانی n بێت بریتیە لە ___؟___ پلە

چالاکی 2

چەقە گۆشەکان لە چەندلایەکی ڕێکدا Central Angles of a Reguler Polygon



1. سەرجەمی پێوانەی چەقە گۆشەکان لە چەند لایەکی ڕێکدا چەندە
2. ئەم ڕێسایەی خوارەوە تەواوبکە.

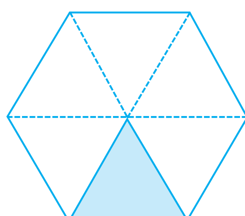
خاڵی چاودێری ✔

پێوانەی چەقە گۆشە لە چەندلای ڕێکدا

The Measure of a Central Angle of a Regular Polygon

پێوانەی هەر چەقەگۆشەیەك لە چەندلایەکی ڕێکدا ژمارەی لاکانی n بێت دەکاتە ___؟___ پلە.

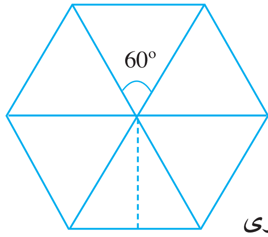
ڕووبەری چەندلای ڕێك Area of a reguler polygonr



ئەستوندەکی چەندلای ڕێك ئەو پارچە ڕاستەهێڵەیە کە چەقی چەندلایەکە دەگەیەنێت بە ناوەڕاستی یەکێك لە لایەکانی. تێبینی دەکەیت کە ئەستوندەك بەرزی هەریەکە لە سێگۆشە ڕێکەکانە کە سەرەکەی لە چەقی چەندلا ڕێکەکە دایە و بنکەکە یەکێك لە لاکانی چەندلاکەیە. بۆ دۆزینەوەی ڕووبەری شەشلایەکی ڕێك، شەشلاکە دابەش دەکەین بۆ شەش سێگۆشەی هاوسێی ڕێکی جووت. ڕووبەری شەشلای ڕێك یەکسانە بە شەش ئەوەندەی ڕووبەری هەر یەکێك لە ڕووبەری سێگۆشەکان.

نموونە 1

هەژمێری ڕووبەری شەشلایەکی ڕێك بکە درێژی لایەکی 20cm

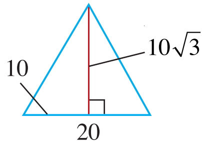


شیکار

بۆ ئەوەی ڕووبەری شەشلایەکە بدۆزینەوە پێویستە یەکەم جار ڕووبەری یەکێك لەو شەش سێگۆشەی کە شەشلاکەیان پێکهێناوە بدۆزینەوە، هەر سێگۆشەیەك لەو سێگۆشانە سێگۆشەیەکی ڕێکە. لەلایەکی ترەوە گۆشەی سەری سێگۆشەکە، چەقە گۆشەیەکە لە گۆشەکانی شەشلا ڕێکەکە. پێوانەکەی یەکسانە بە $360 \div 6 = 60$ لەوەوە بۆمان دەردەچێت کە هەریەکە لەو شەش سێگۆشەیە سێگۆشەی ڕێکن.درێژی لایەکی 20 Cm ، ئەستوندەکی شەشلا ڕێکەکە بریتیە لە بەرزی ئەو سێگۆشە ڕێکە.کەواتە، درێژی ئەستوندەکە یەکسانە بە: $20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$

ڕووبەری هەر سێگۆشەیەك یەکسانە : $\frac{1}{2}(20)(10\sqrt{3}) = 100\sqrt{3}$

ڕووبەری شەشلا ڕێکەکە یەکسانە $6(100\sqrt{3}) = 600\sqrt{3}$



$1039\text{cm}^2 = 600\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

دەتوانیت ڕێگاکەی پێشوو بەکاربهێنیت بۆ دۆزینەوەی ڕووبەری چەندلایەکی ڕێك کە ژمارەی لاکانی n بێت. دەتوانرێ ئەو چەندلایە دابەش بکرێت بۆ n سێگۆشە لە سێگۆشە جووت بووەکان.

Area of regula polygon ڕووبەری چەندلای ڕێك

ڕووبەری چەند لایەکی ڕێك ئەستوندەکەی a بێت و چێوەکەی P بێت دەکاتە $A = \frac{1}{2}ap$

نموونە 2

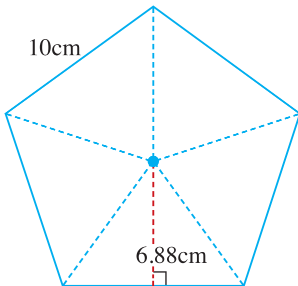
ڕووبەری پێنجلای بەرامبەر بدۆزەرەوە

شیکار

چێوەی پێنجلای ڕێکەکە $5 \times 10 = 50$

ڕووبەری پێنجلا ڕێکەکە $\frac{1}{2} \times 6.88 \times 50 = 172$

172cm^2



ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1. ئایا دەتوانیت چوارلایەك بکێشیت سێ سێگۆشەی ناوەوەی هەبێت پێوانەی هەر یەکێکیان 60 پلە بێت ؟ هۆی وەلامەکەت بنووسە
2. سێگۆشەیەکی ڕێك چەندلایەکی ڕێکە کە سێلای هەیە. بەرزییەکەی (ئەستوندەکەی) کامەیە؟
3. چوارگۆشە چەندلایەکی ڕێکە لە چوارلا پێکهاتووە ئەستوندەکەی کامەیە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

4 سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی هەشتلایەك چەندە؟

5 سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی سێزدەلایەك چەندە؟

6 سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی حەوتلایەك چەندە؟

7 سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی یازدەلایەك چەندە؟

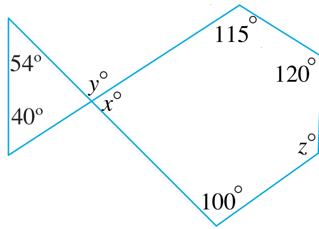
ڕاهێنان و جێبەجێکردن

8 ئەم شێوەیەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی پێوانە داواکراوەکان

$x^\circ =$ ________

$y^\circ =$ ________

$z^\circ =$ ________

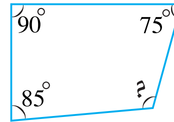


9 ڕووبەری شەشلایەکی ڕێك چەندە کە درێژی لایەکی 12cm ؟

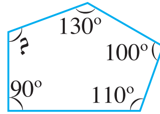
10 ڕووبەری دەلایەکی ڕێك چەندە کە درێژی لایەکی 6m و درێژی ئەستوندەکەی 9.23m بێت.

پێوانەی گۆشەی نادیار لەهەریەك لە پرسیارەکانی 11–14 بدۆزەرەوە.

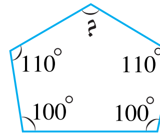
11



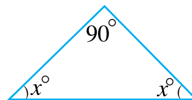
12



13



14



لە پرسیارەکانی 15 تا 18 پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەکە بدۆزەوە

15 چوارگۆشە

16 سێگۆشەیەکی ڕێك

17 دوازدەلایەکی ڕێك

18 پێنجلای ڕێك

ژمارەی لاکانی چەندلایەکی ڕێك چەندە ئەگەر پێوانەی هەر گۆشەیەك لە گۆشەکانی ناوەوەی یەکسان بێت بە

19 135°؟

20 150°؟

21 165°؟

جەبر

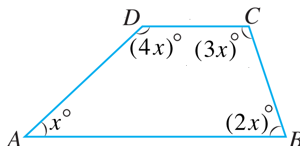
بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 22 تا 25 پێوانەی گۆشەکان بدۆزەرەوە؟بە پشت بەستن بە وێنەکەی بەرامبەر.

22 گۆشەی A

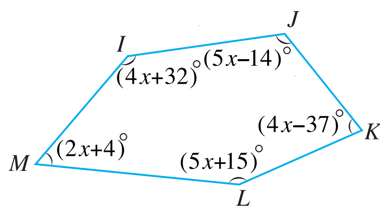
23 گۆشەی B

24 گۆشەی C

25 گۆشەی D



بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 26 تا 30 پێوانەی گۆشەکە دیاریبکە بەسەرنجدان لە وێنەکەی بەرامبەر.



26 گۆشەی I

27 گۆشەی J

28 گۆشەی K

29 گۆشەی L

30 گۆشەی M

چێوە رووبەری هەر یەك لەو چەندلا رێكانە بدۆزەوە.وەڵامەكەت بەشێوەی برێكی رەگی و بە سادەترین شێوە بێت.

31 سێگۆشەیەكی رێك درێژی لاكەی 8 Cm

32 شەشلایەكی رێك درێژی لاكەی 13 m

33 چوارگۆشەیەك تیرەكەی 14 Cm

34 هەشتلایەكی رێك درێژی ئەستوندەكەی = 5 Cm

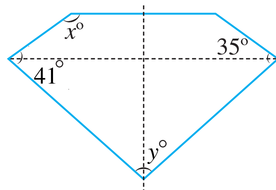
35 گەورەترین ژمارە بۆ گۆشە تیژەكانی سێگۆشە چەندە؟ ئایا سێگۆشە هەیە گۆشەی تیژی نەبێت؟هۆی وەڵامەكەت دیاربكە.

36 گەورەترین ژمارە بۆ گۆشە تیژەكانی چوارلایەك چەندە؟ ئایا چوارلا هەیە گۆشەی تیژی نەبێت؟هۆ بۆ وەڵامەكەت دیاربكە.

37 گەورەترین ژمارە بۆ گۆشە تیژەكانی پێنجلایەك چەندە؟ ئایا پێنجلا هەیە گۆشەی تیژی نەبێ؟ هۆی وەڵامەكەت دیاربكە

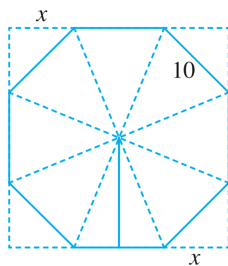
جێبەجێكردنەكان

38 بەردە بەنرخەكان ئەڵماس دەبردرێ لە شێوەی (برلنت) بۆ ئەوەی تواناى تیشكدانەوەكەی زۆربێ و گۆشەی برینەكان دیاری دەكرێت بە پێی سیفەتی بەردەكە لە شكاندنی تیشكی رووناكی، ئەم شێوەیەی خوارەوە پارچەیەكی هەڵبژاردەیە لە بەردی ئەڵماس بە شێوەیەك كەپارچەكە تەوەری هاوجێبوونی هەیە.گۆشەكانی ئەم شێوەیە هەژماربكە.



شێوەی بەرامبەر بەكاربێنە كە هەشتلایەكی رێك دەنوێنێ لە ناو چوارگۆشەیەكدا. بۆ شكاری پرسیارەكان لە 39 بۆ 42 .

39 جۆری ئەو سێگۆشانە بنووسە كە سەرەكانیان سەرەكانی چوارگۆشەكەن. و دەكەونە دەرەوەی هەشتلا رێكەكە؟ بەهای x هەژماربكە.



40 ئەستوندەكی هەشتلا رێكەكە بدۆزەرەوە

41 رووبەری هەشتلا رێكەكە بدۆزەرەوە

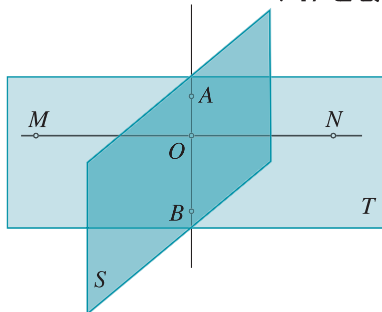
42 رووبەری هەشتلا رێكەكە كە درێژی لایەكی y بێت چەندە؟

43 ئایا چەندلایەكی رێك هەیە پێوانەی هەریەكە لە چەق گۆشەكانی 50 پلە بێت؟

44 ئایا چەند لایەكی رێك هەیە پێوانەی هەریەكە لە گۆشەكانی ناوەوەی 30 پلە بێت؟ هۆی وەڵامەكەت روونبكەوە.

ڕوانین بۆ دواوە

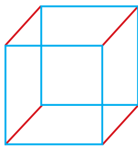
شێوەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکان لە 45 هەتا 47 .



45 یەکتربڕینی هەردوو ڕاستەهێڵی AB و MN ناوبنێ.

46 سێ خاڵ دیاربکە کە ڕووتەختی T یان دیاریکردووە .

47 یەکتربڕینی دوو ڕووتەختی T و S ناوبنێ.



48 شێوەی بەرامبەر شەشپاڵویەك دەنوێنێ. ئەو ڕاستەهێڵانەی کە ڕەنگکراون بە سوور چیان پێ دەڵێین.

49 ئەگەر ئەو لا سوورانە درێژبکرێنەوە چی ڕوودەدات.

ڕوانین بۆ پێشەوە

50 خاڵی $A(2, 2)$وخاڵی $B(4, 1)$لە ڕووتەختی پۆتانەکان دیاریبکە

51 هەریەك لە پۆتانی خاڵی A لێکبدە لە 3 پۆتانی خاڵێکی تازە C دەستدەکەوێت. خاڵی C دیاریبکە.

52 هەریەك لە پۆتانەکانی خاڵی B لێکبدە لە 3 پۆتانی خاڵێکی تازە D دەستدەکەوێت خاڵی D دیاریبکە.

53 هەردوو ڕاستەهێڵی AB و CD چییان پێ دەوترێت؟هۆی وەڵامەکەت دیاربکە.

54 ئەگەر 4 بەکاربهێنی لە جیاتی 3 لە هەردوو پرسیاری 52 ، 53 ئایا بۆچوونەکەت دەگۆڕێ لە سەر هەردوو ڕاستەهێڵی AB ، CD ؟

وانەی 5

هاوڕێژەی ئەندازەیی Geometric Proportion



دۆزینەوەی بنەمای کارکردنی ئامێری وێنەگرتن دەگەڕێتەوە بۆ زانای عەرەبی (ابن هیثم) کە لە نێوان ساڵەکانی 965–039 1 ک ژیاوە

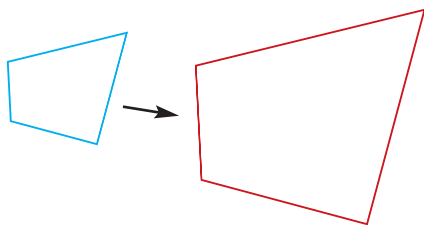
ئامانجەکان

- هاوڕێژەی ئەندازەیی و دانەکانیان جیادەکاتەوە
- وێنەی شێوەیەك بە هاوڕێژەی ئەندازەیی پێکدێنێت.

بۆچی؟

کاتێك وێنەی مرۆڤێك بە ئامێرێکی کۆن دەگریت لە ژوورە تاریکەکەی ئامێرەکە وێنەیەکی هەڵگەڕاوە بۆ ئەو مرۆڤە دروست دەبێت دەتوانی ئەمە ڕوونبکەیەوە بەبەکارهێنانی هاوڕێژەی ئەندازەیی.

سێ جێگۆڕکێ ئەندازەییت خوێندوە: کشانەوە و وێنەدانەوە و خولانەوە.ئەم جێگۆڕکێیانە بە سیفەتێکی گرنگ جیادەکرێنەوە. ئەویش بریتیە لە پاراستنی شێوە و پێوەرەکان. بەو جێگۆڕکێیانە دەڵێین پارێزگاری لە پێوانە دەکات واتە پێوانەیین. لەم وانەیەدا جۆرێکی تازە لە جێگۆڕکێ دەخوێنین کە پارێزگاری لە پێوەرەکان دەکات. ئەویش هاوڕێژەی ئەندازەییە.



هاوڕێژەیی ئەندازەیی Dilation

وێنەی خاڵی $A(x, y)$ دەستدەکەوێت بە هاوڕێژەی ئەندازەیی، ئەویش بەلێکدانی هەریەك لە پۆتانەکەی لەهەمان ژمارە کەپێی دەوترێت کۆڵکەی هاوڕێژەکە **Scale Factor** . کەواتە وێنەی خاڵی $A(x, y)$ بە هاوڕێژەی ئەندازەیی بەرێژەی n دەکاتە (nx, ny).

نموونە 1

وێنەی خاڵی **(2, 3)** بە هاوڕێژەی ئەندازەیی بەرێژەی **4** چەندە؟

شیکار

وێنەی خاڵی $(2\times 4,\ 3\times 4) = (8, 12)$

چالاكی 1

پۆتانی هاوڕێژەیی ئەندازەیی Geometric Proportion in the Coordinate Plane

1. خاڵی $A(3, 4)$ لە ڕووتەختی پۆتاندا دیاریبکە. یاسای دووری نێوان دوو خاڵ بەكاربهێنە بۆ هەژماركردنی دووری خاڵی A و خاڵی بنەڕەت O لە ڕووتەختی پۆتاندا. ئەم خشتەیەی خوارەوە تەواوبكە لە ڕێگای دیاریكردنی پۆتانی خاڵی A' كە وێنەی خاڵی A یە بەرێژەی ئەندازەیی كە لە ستونی سێیەمدا ڕوونكراوەتەوە.

خاڵی A	AO	كۆڵكەی هاوڕێژە	وێنەی A'	OA'	$\frac{OA'}{OA}$
(3, 4)	؟	2	؟	؟	؟
(3, 4)	؟	0.5	؟	؟	؟
(3, 4)	؟	−1	؟	؟	؟
(3, 4)	؟	n	؟	؟	؟

2. خاڵی A وێنەكەی A' لە هەربارێكدا بكێشە. تێبینی چی دەكەیت لەسەر هەموو ئەو خاڵانە؟

3. ئەم گریمانانەی خوارەوە تەواوبكە.

گریمانە

ئەگەر A' وێنەی A و بێت بە هاوڕێژەیەكی ئەندازەیی ڕێژەكەی n. ئەوا $OA' =$ ___؟___ $\times OA$.

خاڵی چاودێری

4. خاڵی $A(3, 4)$ جارێكی تر دیاریبكە و خاڵی $A(5, 6)$ لەگەڵی دیاریبكە ئەم خشتەیەی خوارەوە تەواوبكە.

خاڵی B	AB	كۆڵكەی هاوڕێژە	وێنەی B'	$A'B'$	$\frac{A'B'}{AB}$
(5, 6)	؟	2	؟	؟	؟
(5, 6)	؟	0.5	؟	؟	؟
(5, 6)	؟	−1	؟	؟	؟
(5, 6)	؟	n	؟	؟	؟

جەبر

5. ئەم گریمانانەی خوارەوە تەواوبكە:

گریمانە

ئەگەر $\overline{A'B'}$ وێنەی پارچە ڕاستەهێڵی AB بێت بە هاوڕێژەیەكی ئەندازەیی بەرێژەی n ئەوا $A'B' =$ ___؟___ $\times AB$

خاڵی چاودێری

6. لاری ڕاستەهێڵی AB بدۆزەرەوە

7. لاری ڕاستەهێڵی $A'B'$ لەهەربارێكدا بدۆزەوە.

8. ئەم گریمانەی خوارەوە تەواوبكە

گریمانە

هاوڕێژەی ئەندازەیی پارچە ڕاستەهێڵێك دەگۆڕێت بۆ پارچە ڕاستەهێڵی ___؟___

هەموو ئەو ڕاستەهێڵانەی بەخاڵێك و وێنەكەی بە هاوڕێژەیەكی ئەندازەیی دیاریكراودا دەڕۆن لەیەك خاڵدا بەیەكدەگەن. پێی دەوترێت (چەقی هاوڕێژە). هەموو هاوڕێژە ئەندازەییەكان لە چالاكی 1 دا چەقەكەیان خاڵی بنەڕەتە. هەموو هاوڕێژەیەكی ئەندازەیی چەقێكی هەیە.

جێبەجێکردنەکان

ڕۆناکی

بیلبیلەی چاو فراوان دەبێتەوە یان تەسک دەبێتەوە بۆ ڕۆیشتنی ڕووناکی پێویست پیایدا تاکو مرۆڤ بتوانێت شتەکان ببینێت لەڕۆژدا تەسک دەبێتەوە و لە شەودا فراوان دەبێت لە ئامێری وێنەگرتندا ئەم شتە وەك بیلبیلەکە وایە.بۆ دەست بەسەراگرتنی بڕی ڕووناکی پێویست بۆ گرتنی وێنەیەکی باش





بیلبیلەی چاوەکە لە وێنەی چەپدا تەسک بۆتەوە چونکە بڕی ڕووناکیەکە زۆرە. بەڵام لە وێنەی لای ڕاستدا زیاتر کراوەتەوە چونکە بڕی ڕووناکی پێویست کەمترە؟

لە چالاکی 1 دا تێبینیت کرد کە درێژی وێنەی پارچە ڕاستەهێڵەکە بەگۆڕانی کۆڵکەی هاوڕێژەکە دەگۆڕێت. کاتێك پێوەرەکانی وێنەکە بچووکتربێت لە پێوەرەکانی شێوە بنەڕەتیەکە بەو هاوڕێژە دەوترێت بچووك کردنەوە و کاتێك پێوەرەکانی وێنەکە گەورەتر بوو لە پێوەرەکانی شێوە بنەڕەتیەکە بەو هاوڕێژەیە دەوترێت (گەورەکردن).

بیرکردنەی ڕەخنەگرانە چیمان دەستدەکەوێت لە وێنەی خاڵێك یان پارچە ڕاستەهێڵێك بەهاوڕێژەیەکی ئەندازەیی کەرێژەکەی سالیب بێت؟

چالاکی 2

کێشانی وێنەی شێوەیەك بە هاوڕێژەی ئەندازەیی Drawing a Dilation

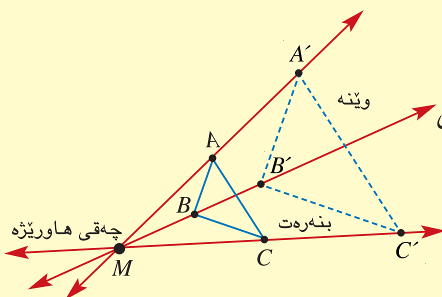
A
B
C
M
چەقی هاوڕێژە
بنەڕەت

1. سێگۆشەیەك بکێشە وخاڵێکی دەرەوەی، M کە چەقی هاوڕێژەکە دەنوێنێت، ئەو ڕاستەهێڵانە بکێشە کە بەچەقی هاوڕێژەکە و هەموو سەرەکانی سێگۆشەکەدا دەڕۆن.

2. ژمارەیەکی موجەب n هەڵبژێرە بۆ کۆڵکەی هاوڕێژەکە، سەرێك لە سەرەکانی سێگۆشەکە وەك B هەڵبژێرە، و دووری x بدۆزەرەوە لە نێوان ئەو سەرە و چەقی هاوڕێژەکە. دووری x لە کۆڵکەی هاوڕێژەکە n بدە بۆ ئەوەی دووری نێوان وێنەکە B' لە لوتکەی B و چەقی هاوڕێژەکە M دەستکەوێت.خاڵێك لە سەر MB وەربگرە کە لە چەقی هاوڕێژەکە بە nx. ئەو خاڵە خاڵی B' وێنەی سەری B یە کە هەڵت بژاردبوو بەهاوڕێژەیی.

3. کردارەکە دووبارە بکەوە.

4. هەرسێ خاڵە دەستکەوتووەکە بەیەکبگەیەنە سێگۆشەیەکی تازەت دەستدەکەوێت کە وێنەی سێگۆشە بنەڕەتییەکەیە بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی.



خاڵی چاودێری ✓

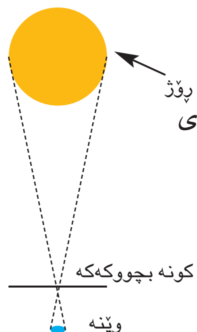
نموونـــه 2

جێبەجێکردنەکان
گەردوون

لەم وێنەیەی خوارەوە دوو خوێندکار چاودێری گیرانی ڕۆژیان دەکرد لە کونێکی بچووکەوە. بۆ ئەوەی کردارەکە تێبگەی وایدابنێ کە کارەکە پابەندە بە وێنەی ڕۆژەکە بەهاوڕێژەیەك کە چەقەکەی بکەوێتە کونە بچووکەکەوە. تیرەی ڕۆژ دەکاتە 1 400 000km بەنزیکی تێکڕای هاوڕێژە چەندە؟ ئەگەر تیرەی وێنەی. ڕۆژەکە 0.63cm بێت.



شیکار



وێنەی بەرامبەر ڕێڕەوی تیشکی ڕۆژ ڕووندەکاتەوە کە لە لاکانی ڕۆژەکە دەردەچێت هەروەکو دەیبینین لە زەوییەوە. ڕێژەی هاوڕێژەکە سالبە. چونکە وێنەی ڕۆژەکە دەکەوێتە لاکەی تر بەپێی چەقی هاوڕێژەکە (کونە بچووکەکە) بۆ دەستکەوتنی کۆڵکەی هاوڕێژەیی تیرەی وێنەکە دابەش دەکەین بەسەر تیرەی ڕۆژەکەدا وەك لە خوارەوە دەردەکەوێت.

$$\frac{0.63}{1400\,000\times100\,000}=\frac{0.63}{1.4\times10^{11}}=\frac{63}{140}\times10^{-11}=4.5\times10^{-12}$$

ڕاهێـــــــنـــــــان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1 بەچی هاوڕێژەی ئەندازەیی لە جێگۆڕکێ ئەندازەییەکانی تر جیادەکرێتەوە.

2 کۆڵکەی هاوڕێژەی ئەندازەیی چییە؟چۆن کۆڵکەی هاوڕێژەی ئەندازەیی دیاریدەکەیت. بەزانینی پارچە ڕاستەهێڵ و وێنەکەی؟

کاریگەری هاوڕێژەی ئەندازەیی ڕوونبکەوە لەسەر وێنەی شێوە ئەندازەییەک ئەگەر کۆڵکەکەی یەکسان بێت بە:

3 2　**4** 0.5　**5** -1　**6** 1

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

چەقی هاوڕێژەیی ئەندازەیی لە پرسیاری 7 بۆ 10 خاڵی بنەڕەتە وێنەی خاڵەکە لە هەر جارێکدا دیاریبکە لە دواییدا خاڵ و وێنەکەی لە ڕووتەختی پۆتانەکاندا بکێشە.

7 خاڵەکە: $(1, 5)$ ڕێژەکە : 3

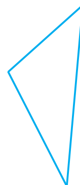
8 خاڵەکە: $(-1, 4)$ ڕێژەکە : 2

9 خاڵەکە: $(6, -2)$ ڕێژەکە : 0.25

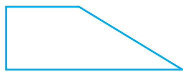
10 خاڵەکە: $(2, 3)$ ڕێژەکە : -2

شێوە و چەقی هاوڕێژە درووستبکە، لە دوایدا وێنەی شێوەکە بەهاوڕێژەیی n بکێشە:

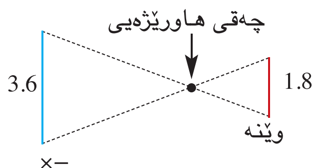
11 $n = 2$



12 $n = -1$



13 وێنەی بەرامبەر پارچە ڕاستەهێڵێك و وێنەکەی بە هاوڕێژیەکی ئەندازەیی ڕووندەکاتەوە. ڕێژەی ئەو هاوڕێژەیە چەندە؟



ڕاهێنان و جێبەجێکردن

جەبر

هەرپرسیارێك لە پرسیارەکانی 14–17 سەرەکانی شێوە ئەندازەییەك دەنوێنێت و کۆڵکەی هاوڕێژەیی ئەندازەییەکە لەخۆدەگرێت کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە لە ڕووتەختی پۆتاندا. وێنەی هەر سەرێك لە سەرەکانی هەر شێوەیەك دیاریبکە. لە دواییدا شێوە بنەڕەتییەکە و وێنەکەی لە ڕووتەختی پۆتاندا بکێشە.

14 $(1, 3)$؛ $(2, 5)$؛ $(4, 3)$؛ ڕێژەکە= 2 :

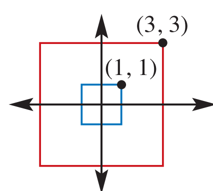
15 $(-3, 5)$؛ $(8, 9)$؛ $(2, -6)$؛ ڕێژەکە = $\frac{1}{3}$

16 $(0, 0)$؛ $(6, 0)$؛ $(4, 4)$؛ $(2, 3)$ ڕێژەکە = $-\frac{1}{2}$

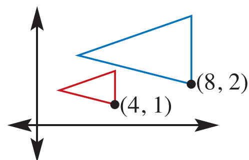
17 $(1, 1)$؛ $(3, -1)$؛ $(-2, -3)$؛ ڕێژەکە = 1.6

هەرپرسیارێك لە پرسیارەکانی 18–21 دوو شێوەی تێدایە یەکێکیان سوور و ئەوەی تریان شینە. شێوە سوورەکە وێنەی شێوە شینەکە دەنوێنێ بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە لە ڕووتەختی پۆتاندا.ڕێژەی هاوڕێژەیی ئەندازەییەکە لە هەر جارێکدا دیاریبکە:

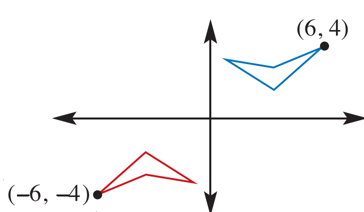
18



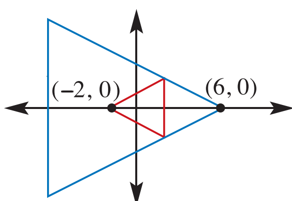
19



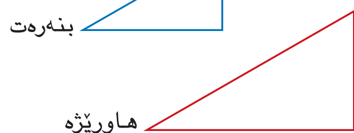
20



21



22 ئەم شێوەیەی بەرامبەرت بکێشە و چەقی هاوڕێژە و ڕێژەکەی دیاریبکە.



هەرپرسیارێك لە پرسیارەکانی 23–26 پۆتانی هەردوو سەری پارچە ڕاستەهێڵێکن، ڕێژەی هاوڕێژەیی ئەندازەیەکەی کە چەقەکەی خاڵی بنەڕتە لە ڕووتەختی پۆتاندا. بەبەکارهێنانی لاری ڕوونیبکەرەوە کە وێنەی پارچەڕاستەهێڵەکە بە هاوڕێژەی ئەندازەیی بریتییە لە پارچە ڕاستەهێڵێك تەریبە بەبنەڕەتەکەی.

23 $(1, 0)$ و $(5, 3)$ ؛ $n=2$

24 $(-2, 3)$ و $(3, 1)$ ؛ $n=5$

25 $(-2, 4)$ و $(4, 8)$ ؛ $n=\frac{1}{2}$

26 $(1, 1)$ و $(2, 4)$ ؛ $n=1.7$

جەبر

هەر پرسیارێك لە پرسیارەکانی 27–30 پۆتانی خاڵێك و کۆڵکەی هاوڕێژەیی ئەندازەییەکە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە لە ڕووتەختی پۆتانەکاندا. بسەلمێنە کە ئەو ڕاستەهێڵەی بە خاڵەکەو وێنەکەی دادەڕوات بە هاوڕێژەی ئەندازەیی بە خاڵی بنەڕەت دادەڕوات لە ڕووتەختی پۆتانەکەدا.

27 $(1, 5)$ ؛ $n=4$

28 $(3, -2)$ ؛ $n=\frac{5}{6}$

29 $(-5, 3)$ ؛ $n=-3$

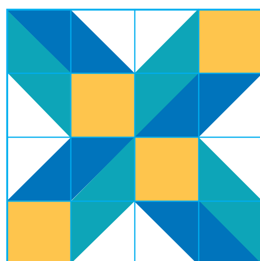
30 $(7, 4)$ ؛ $n=2.5$

بەرەنگاری

31 لە نموونەکانی هاوڕێژەی ئەندازەیی کە چەقەکەی نەکەوێتە خاڵی بنەڕەت لە ڕووتەختی پۆتاندا ئەو جێگۆڕکێیانەی کە خاڵی (x, y) دەگۆڕێت بۆ خاڵی $(2x-4, 2y-3)$ ئەو پارچە ڕاستەهێڵە بکێشە کە دوو سەرەکانی بریتین لە $(2, 3)$ و $(5, 5)$ وێنەکە بکێشە بە جێگۆڕکێییەی پێشوو.چەقی هاوڕێژەی ئەندازەیی و ڕێژەکەی دیاریبکە لەوەی پێی هەستایت: سوود وەربگرە بۆ نوسینی پۆتانی خاڵی(x, y) بەوڕێژە ئەندازەیەی کە چەقەکەی خاڵی $(1, 2)$ و ڕێژەکەی 4 بێت.

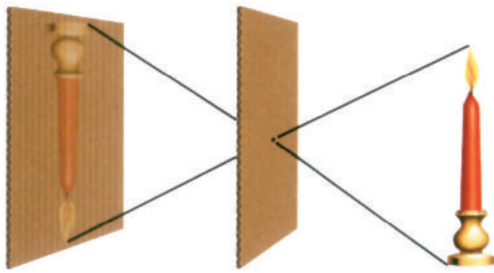
جێبەجێکردنەکان

32 گلارە ویستی ئەم شێوەیەی بەرامبەر گەورە بکات لەسەر چوارگۆشەیەك کە لاکەی12cm لە جیاتی 4cm کۆڵکەی هاوڕێژەی ئەندازەیی ڕێگاپێدراو بۆ ئەم کارە چەندە؟پۆتانی سەرەکانی یەکێك لە لاتەرییەکان ئەمانەن $(0, 0)$؛ $(1, 1)$؛ $(1, 2)$؛ $(0, 1)$ پۆتانی وێنەی هەرسەرێك لەسەرەکانی دیاریبکە، بە گەورەکردن لەدواییدا وێنەی لاتەرییەکە بکێشە. شێوە بنەڕەتیەکەی لاتەرییەکەو وێنەکەی بەتەواوەتی لەسەر ڕووتەختی پۆتان بکێشە.



جێبەجێکردنەکان

وێنەی بەرامبەر هێڵکاریەك ڕووندەکاتەوە کە چۆن ئامێری وێنەگرتن کاردەکات.



33 کام بەش لە ئامێری وێنە گرتنەکە چەقی هاوڕێژەکە دەنوێنێت؟

34 ئایا کۆڵکەی هاوڕێژەکە موجەبە یان سالبە؟ هۆی وەڵامەکەت دیاریبکە.

35 ئەو هۆیە چییە کەوا لە وێنەکە دەکات هەڵگەڕاوەبێت.

36 یەکێك لە ئەندازیارەکان هەستا بە بچووککردنەوەی هێلکاری خانوێك بەبەکارهینانی ئامێری لەبەرگرتنەوە. پانی هێڵکاریەکە 15 cm و پانی وێنەکە 6 cm بوو. ڕێژەی بچووککردنەوەکە چەندە؟

ڕوانین بۆ دواوە

37 چێوەی سێگۆشەیەکی دوولایەکسان بدۆزەوە کە درێژی بنکەکەی 6cm و درێژی لایەکی ڕووبەرەکەشی 8cm بدۆزەوە.

جێبەجێکردنەکان

38 درێژی ژێی ئەو سێگۆشەیە بدۆزەوە، کە پێوانەی گۆشەکانی 45 ، 45 ، 90 و درێژی لایەکی 7cm .

39 **زەوی ناسی** چێوەی گەورەترین بازنەی زەوی دەگاتە 40 000km ئایا نیوەتیرەی زەوی چەندە؟

40 **زەوی ناسی** بەرزی بەرگە هەوای زەوی دەگاتە 550km ئەم زانیارییە بەکاربێنە بۆ وەڵامی پرسیاری 39 بۆ هەژمارکردنی–Ì ôá_fô گۆی زەوی لەگەڵ بەرگە هەواکەی.

ڕوانین بۆ پێشەوە

جێبەجێکردنەکان

کورسی پێچکەدار یەکێك لە ئەندازیاران ویستی دیزاینێك دابنێت بۆ کورسیەکی پێچکەدار کە پەککەوتووەکان بەکاری دێنن بۆ بەشداریکردن لە یاری تۆپی سەبەتە. بڕیاریدا کە تیرەی پێچکەکە 56cm بێت.

41 کورسی پێچکەدارەکە کاتێك 45° دەخولێتەوە چەند بەرەو پێشەوە دەڕوات.

42 درێژی یاریگایەکی تۆپی سەبەتە 23.5m . چەند خول تایەکە دەخولێتەوە بۆ ئەوەی کورسیە تایەدارەکە یاریگەکە ببڕێت و بچێتە لایەکی تری.



وانەی
6

بازنە Circles



ئامانجەکان

- هاوکێشەی بازنە دەنووسێت و بەکاریدەهێنێت.
- هاوکێشەی بازنە بە پێی گۆڕانی چەقەکەی ڕاستدەکاتەوە.

بۆچی؟

بەرنامە ئەندازەییەکان ژمارەیەك لە شێوە ئەندازەییەکان دروست دەکەن وەك خاڵ و ڕاستەهێڵ بازنە. ئەم بەرنامانە هاوکێشە جەبری تایبەت بەو شێوانە بەکاردەهێنێت.

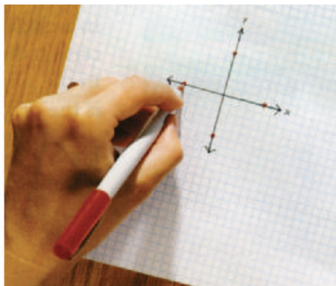
کێشانی بازنە لە هاوکێشەکەیەوە Graphing Circle From an Equation

لە ماوەی خوێندنی ڕابردوو کۆمەڵێك هاوکێشەی جۆراوجۆر هاتۆتەڕێت وەك $y = 2x - 3$ (هاوکێشەی ڕاستەهێڵ) یان $y = x^2 - 3$ (هاوکێشەی برگەی هاوتا) لەم وانەیەدا جۆرە هاوکێشەیەك دەدۆزیتەوە کە x و y بە دووجایی تێدا دەردەکەوێت.

نموونە 1

هێڵە ڕوونکردنەوەی هاوکێشەی $x^2 + y^2 = 25$ بکێشە بە دۆزینەوەی ژمارەیەك لە جووتە ڕێکخراوەکان (x, y) کە پاسادانی ئەم هاوکێشەیە دەکەن و دیاریکردنی ئەو **خاڵانەی سەر بەو هاوکێشەیەن**. ئەو شێوە ئەندازەییە لە **هێڵە ڕوونکردنەوەیەکە بناسە**. دەتوانیت پەنا بەریتە بەر بژمێری ڕوونکردنەوە (حاسبة بيانية) بۆ دڵنیابونت لە ڕاستی وێنەکەت.

جەبر



شیکار

لە کاتی هەوڵدانت بۆ کێشانی هێڵی ڕوونکردنەوە بۆ جۆرێکی تازە لە هاوکێشەکان یەکەم جار هەوڵبدە ئەو خاڵانە دیاری بکەیت کە هەردوو تەوەرەکەی تێدا دەبڕێت. بۆ دیاریکردنی خاڵی یەکتر برین لەگەڵ تەوەرەی

سینی لە جیاتی گوراوی y سفر دابنێ ($y = 0$).

$x^2 + 0^2 = 25$، یان $x^2 = 25$، یان $x = \pm 5$



هێڵە ڕوونکەرەوەکە تەوەرەی سینی لە خاڵی$(5, 0)$ و$(-5, 0)$ دەبڕێت

بۆ دۆزینەوەی خاڵی یەکتربڕینی هێڵەکە لەگەڵ تەوەرەی صادی. y بدۆزەرەوە بە دانانی $x = 0$

$0^2 + y^2 = 25$ یان $y^2 = 25$ یان $y = \pm 5$ هێڵە ڕوونکەرەوە کە تەوەرەی صادی لە خاڵی $(0, 5)$ و $(0, -5)$ دەبڕێت لە دوای ئەوە لە جیاتی گۆڕاوی x چەند بەهایەکی تر وەربگرە وەك 3

$$3^2 + y^2 = 25$$

$y^2 = 16$ یان $y = \pm 4$ هێڵە ڕونکەرەوەکە

بە هەردوو خاڵی $(3, 4)$ ، $(3, -4)$ دا دەڕوات. بەم شێوەیە دەتوانیت ئەم خشتەیەی بەرامبەر دروستبکەیت بە لەجیاتی دانانی گۆڕاویx بەچەند بەهایەکی گونجاو.ئەو خاڵانەی لە خشتەکەدا هاتووە لەسەر ڕووتەختی پۆتان دیاریبکە و خاڵەکان بگەیەنە ئەو وێنەی دەستتدەکەوێت بریتییە لە و بازنەیەی کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و نیوەتیرەکەی 5 . ئەو بازنەیە بکێشە.

x	y	خاڵ لەسەر هێڵەکە
3	± 4	$(3, 4)$ و $(3, -4)$
-3	± 4	$(-3, 4)$ و $(-3, -4)$
4	± 3	$(4, 3)$ و $(4, -3)$
-4	± 3	$(-4, 3)$ و $(-4, -3)$

سەرەنجی ڕەخنەگرانە

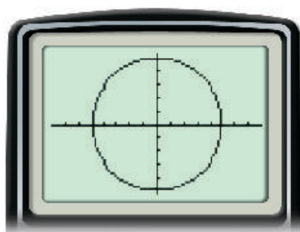
چۆن وێنەی ڕوونکردنەوەکە دەگۆڕێت ئەگەر لە جیاتی ژمارە 25 ژمارەکانی 49 و 81 و 51 لە هاوکێشەکەیدا دابنرێن.

بەکارهێنانی بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی Using Graphing Technology



دەتوانیت بژمێری ڕوونکردنەوە بەکاربهێنیت بۆ کێشانی هێڵی ڕوونکردنەوەیی. بژمێرەکە داوات لێ دەکات کە هاوکێشەکە بخەیتە ناو بژمێرەکەوە لەسەر شێوەی $y = \ldots$ پێویستە لە سەرت هاوکێشەکە شیکار بکەیت بۆ دۆزینەوەی y بەپێی x .

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$y^2 = 25 - x^2$$
$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$



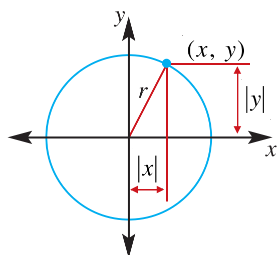
جەبر

بەم شێوەیە دەتوانیت وێنەی هێڵی ڕونکردنەوەی بۆ هاوکێشەی $y = \sqrt{25 - x^2}$ و $y = -\sqrt{25 - x^2}$ بکێشیت.

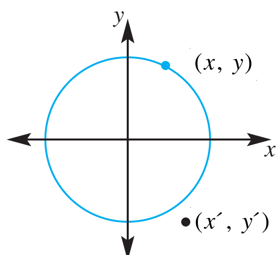
Deriving the Equation of a Circle — پێکهێنانی هاوکێشەی بازنە



بازنە کۆمەڵەخاڵێکە بەدووری یەکسان نت (نیوەتیرە)لە خاڵێکی دیاری کراوەوە (چەقی بازنە). بەسادەترین شێوە دەستپێبکە ئەویش کە خاڵی بنەڕەت ببێتە چەقی بازنە.



خاڵی (x, y) هەڵبژێرە لەسەر بازنەکە کە ناکەوێتە سەر هەردوو تەوەرەکان سێگۆشەیەکی گۆشەوەستاو بکێشە لەو خاڵەوە دەستپێ بکات. هەروەک لەم وێنەی بەرامبەر ڕونکراوەتەوە. درێژی دوولای گۆشە وەستاوەکە بریتیە لە $|x|$ و $|y|$ و درێژی ژێیەکەی بریتیە لە درێژی نیوەتیرەکەی کە درێژبۆتەوە لە نێوان خاڵە هەڵبژاردەکەی سەربازنەکە و خاڵی بنەڕەت. بەوشێوەیە دەبینیت پۆتانی خاڵە هەڵبژاردەکە لە سەر بازنەکە پاسادانی ئەم هاوکێشەیە دەکات



$x^2 + y^2 = r^2$ هاوکێشەی 1

دەتوانیت پاسەدانی ئەوە بکەیت کە پۆتانی خاڵەکانی یەکتربرینی بازنەکە لەگەڵ هەردوو تەوەرەکان پاسادانی ئەم هاوکێشەیە دەکاتە. بەرامبەر ئەوە ئەگەر$(x´, y´)$خاڵێك بێت لە دەرەوەی بازنەکە، دووری ئەو خاڵە لە بنەڕەتەوە یەکسان نیە بە r ، لەم ئەنجامەوە بۆمان دەردەکەوێت کە پۆتانی ئەو خاڵە پاسادانی هاوکێشەکەی پێشو ناکات. کەواتە$(x´)^2 + (y´)^2 \neq r^2$

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە بۆچی $(x´)^2 + (y´)^2 \neq r^2$ کاتێك$(x´, y´)$ناکەوێتە سەربازنەکە؟ تێبینیبکە کە هاوکێشەی 1 ئەم دوو سیفەتەی تێدایە:

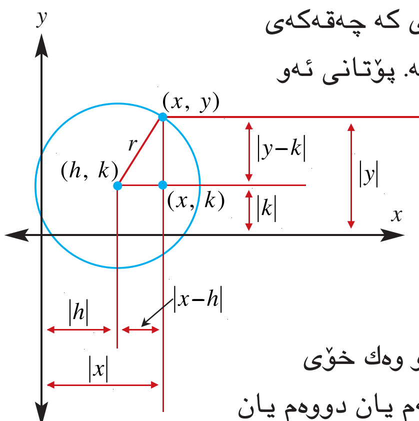
هەر خاڵێك بکەوێتە سەربازنەکە پاسادانی ئەو هاوکێشەیە دەکات.

هەر خاڵێك نەکەوێتە سەربازنەکە پاسادانی ئەو هاوکێشەیە ناکات.

لەوەی پێشەوە بۆمان دەردەکەوێت کە هاوکێشەی$x^2 + y^2 = r^2$هاوکێشەی بازنەیەکە نیوەتیرەکەی (نت) یە و چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە.

Moving the Center of the Circle — جولانی چەقی بازنە

بۆ دۆزینەوەی شێوەی گشتی هاوکێشەی ئەو بازنەیەی کە چەقەکەی ناکەوێتە خاڵی بنەڕەتەوە. سەیری شێوەی بەرامبەربکە. پۆتانی ئەو خاڵەی دەکەوێتە سەربازنەکە کە پاسادانی هاوکێشەی بازنەکە دەکات.



$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ هاوکێشەی 2

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە چۆن ڕوونیدەکەیتەوە کەپەیوەندیەکان لە شێوەی پێشو وەك خۆی دەمێنیتەوە ئەگەر خاڵی (h, k) بکەوێتە چارەکی یەکەم یان دووەم یان سێیەم یان چوارەم .

نموونە 2

چەقی ئەم بازنەیە دیاریبکە کە هاوکێشەکەی $(x-7)^2+(y+3)^2=36$ لە دواییدا نیوەتیرەکەی دیاریبکە.

شیکار

ئەگەر هاوکێشەی دراو لەگەڵ شێوەی گشتی هاوکێشەی بازنە بەراوردبکەین. ئەم لێکچوونانەی خوارەوە دەبینی .

لە هاوکێشەی دراو	لە شێوەی گشتی هاوکێشەی بازنەیی
$(x-7)^2$	$(x-h)^2$
$(y+3)^2=((y-(-3))^2$	$(y-k)^2$
36	r^2

ئەم بەراوردکردنە ڕێگات پێدەدات کە بڵێیت $h=7$ $k=-3$ $r=6$

چەقی بازنەکە بریتییە لە خاڵی$(7, -3)$ یە و نیوەتیرەکەی یەکسانەبە 6 یەکەی درێژی.

هەوڵبدە چەق و نیوەتیرەی هەربازنەیەك لەم بازنانەی خوارەوە دیاریبکە. وێنەی هەر بازنەیەکیان بکێشە و وێنەکە لەگەڵ ئەوانەی دۆزیوتەوە بەراوردبکە.

أ $(x+3)^2+(y-3)^2=49$

ب $(x-3)^2+(y+3)^2=49$

ج $(x-4)^2+(y-5)^2=30$

د $(x+2)^2+(y-5)^2=50$

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 چۆن خاڵەکانی یەکتربڕینی ئەو بازنەی هاوکێشەکەی $x^2+y^2=4$ بێت لەگەڵ هەردوو تەوەرەکە دیاریدەکەیت؟

2 چۆن خاڵەکانی یەکتربڕینی ئەو بازنەی هاوکیشەکەی $(x-2)^2+(y+2)^2=4$ بێت لەگەڵ هەردوو تەوەرەکە دیاریدەکەیت.

3 ئایا بازنەیەك هەیە هەردوو تەوەرەکە نەبڕێت؟ وێنەکەی چۆن دەردەکەویت لەم بارەدا؟

4 یاسای دووری نێوان دووخاڵ بەکاربهێنە بۆ نووسینی دووری نێوان دوو خاڵی (x, y) و(h, k) چ شتێك ئەم برە و شێوەی گشتی هاوکێشەی بازنەکە بەیەکدەبەستێتەوە؟

5 تەکنەلۆجیا زۆر جار کاری بژمێری ڕوونکردنەوە، بۆ کێشانی وێنەی هاوکێشە دراوەکان لە سەر شێوەی$y=$... دەبێت. چۆن شێوەی گشتی هاوکێشەی بازنەیەك شیکاردەکات بە پێی گۆڕاویx ؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

هاوکێشەی $x^2+y^2=100$ بەکاربهێنە لە پرسیارەکانی 6 بۆ 8 .

6 خاڵی یەکتربڕینی بازنەکە لەگەڵ هەردوو تەوەری پۆتانەکان دیاریبکە.

7 ئەم خشتەیەی خوارەوە تەواوبکە.

x	y	خاڵ لەسەر بازنەکە
0	?	?
؟	0	?
6	?	?
−6	?	?
8	?	?
−8	?	?

8 ئەو خاڵانەی لەخشتەی پێشوو دەستتکەوتوە لە ڕووتەختی پۆتانەکان دیاربکە لە دواییدا وێنەی بازنەکە بکێشە.

هاوکێشەی $(x-4)^2+(y-3)^2=25$ بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 9 بۆ 11 .

9 چەقی بازنەکە دیاریبکە.

10 خاڵەکانی یەکتربڕینی بازنەکە لەگەڵ هەریەکە لە دوو تەوەری پۆتان دیاریبکە.

11 ئەم خشتەیەی خوارەوە تەواوبکە.

x	y	خاڵ لەسەر بازنەکە
0	?	?
؟	0	?
1	?	?
−1	?	?
4	?	?
7	?	?
8	?	?
9	?	?

12 ئەو خاڵانەی لە خشتەی پێشوو دەستتکەوتوە لە ڕووتەختی پۆتانەکان دیاریبکە لەدواییدا وێنەی بازنەکە بکێشە

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

جەبر

خاڵەکانی یەکتربڕینی هەربازنەیەك لەم بازنانەی خوارەوە لەگەڵ هەردوو تەوەری پۆتانەکان دیاریبکە.

13 $x^2+y^2=64$

14 $x^2+y^2=50$

15 $x^2+(y-4)^2=25$

16 $(x-2)^2+y^2=9$

17 $(x-6)^2+(y-8)^2=100$

هاوکێشەی بازنەکە بنووسە ئەگەر چەق و نیوەتیرەکەی بزانیت

	چەق	نیوەتیرە
18	(0, 0)	6
20	(0, 0)	$\sqrt{13}$
22	(0, 6)	5
24	(1, −7)	10

	چەق	نیوەتیرە
19	(0, 0)	2.5
21	(2, 3)	4
23	(4, −5)	7
25	(4, −3)	$\sqrt{7}$

جەبر

چەق و نیوەتیرەی هەر یەك لەم بازنانەی خوارەوە بدۆزەوە.

26 $x^2+y^2=100$

27 $x^2+y^2=36$

28 $x^2+y^2=101$

29 $(x-6)^2+y^2=9$

30 $x^2+(y-3)=4$

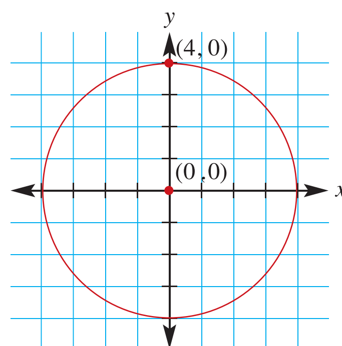
31 $(x+5)^2+(y-2)^2=16$

32 $x^2+(y+3)=49$

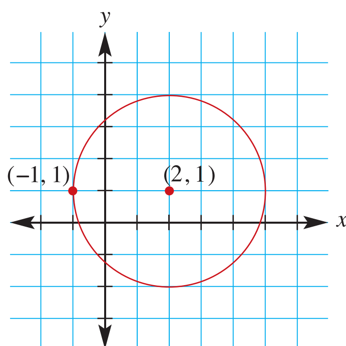
33 $(x+1)^2+(y+3)^2=19$

هاوکیشەی ئەو بازنەیە بدۆزەوە کە لەم وێنانەی خوارەوە ڕوونکراوەتەوە

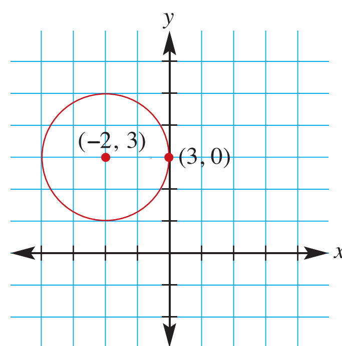
34



35



36



جەبر

خاڵەکانی یەکتربڕینی ئەم بازنە لەگەڵ هەردوو تەوەرەکان وەك لەم خشتەیەدا دراوە بدۆزەوە بە پێی ئەو خاڵانە بۆ هەریەکێکیان وێنەی بازنەکە بکێشە و هاوکێشەکەی بدۆزەوە .

	یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری سینی	یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری صادی
37	3 و −3	3 و −3
38	6 و 2	یەکتربڕین نییە
39	سفر	0 و 8
40	یەکتربڕین نییە	5
41	یەکتربڕین نییە	یەکتربڕین نییە

جەبر

هاوکێشەی ئەو بازنانە بدۆزەوە بەپێی ئەم زانیارییانەی دراوە، باشتر وایە وێنەکە بکێشیت.

42 چەقەکەی $(2, 3)$؛ و لێکەوتە بۆ تەوەری سینەکان.

43 چەقەکەی $(2, 3)$؛ و لێکەوتە بۆ تەوەری صادەکان.

44 چەق: $(0, 1)$؛ بەخاڵی $(4, 4)$ دا دەڕوات

45 چەق: $(2, 3)$؛ بەخاڵی $(8, 3)$ دا دەڕوات

46 چەق: $(2, 3)$؛ بەخاڵی $(8, 11)$ دا دەڕوات

47 $(1, 3)$ و $(5, 3)$دووسەری یەکێك لە تیرەکانیەتی

بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی یان کاغەزی ڕوونکردنەوە بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکان لە 48 تا 54 .

48 بە ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی $(x-3)^2+(y-5)^2=4$ بنوێنە. وێنەی ئەوەی دەستتکەوتوە بە دەوری تەوەری سینی بکێشە. هاوکێشەی ئەم وێنەیەش بنووسە.

49 بە ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی $(x-4)^2+(y-2)^2=1$ بنوێنە. وێنەی ئەوەی دەستتکەوتوە بە دەوری تەوەری سینی بکێشە. هاوکێشەی ئەم وێنەیە بنووسە.

50 بە ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی $(x-2)^2+y^2=9$ بنوێنە. وێنەی ئەوەی دەستتکەوتوە بە کشانەوەی 6 یەکە بۆلای ڕاست بکێشە. هاوکێشەی ئەم وێنەیە بنووسە.

51 بە ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی $(x-6)^2+(y-4)^2=9$ بنوێنە. وێنەی ئەوەی دەستتکەوتوە بە کشانەوەی 2 یەکە بۆلای ڕاست بکێشە. هاوکێشەی وێنەکە بنووسە.

52 بە ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی $(x-5)^2+(y-4)^2=9$ بنوێنە. وێنەی ئەوەی دەستتکەوتوە بە خولانەوەی گۆشەکەی بە 180 بکێشە لە دەوری خاڵی بنەڕەت بکێشە. هاوکێشەی ئەم وێنەکە بنووسە.

53 هاوکێشەی لێکەوتی بازنەی $x^2+y^2=100$ لە خاڵی $A(-6, 8)$ بدۆزەرەوە.

بەرەنگاری

54 ئەو سێگۆشەیەی کە سەرەکانی $(0, 0)$، $(0, 6)$، $(8, 0)$ بن بکێشە لە دواییدا هاوکێشەی ئەو بازنەیە بدۆزەوە کە بەسەرەکانیدا ڕۆیشتوە.

ڕوانین بۆ دواوە

55 پاوان تیرێکی هەڵدا بۆ سەر وێنەی بازنەیەك کە هاوکێشەکەی $x^2+y^2=100$ ئەگەری ئەوەی تیرەکە بکەوێتە ناو بازنەی $x^2+y^2=25$ چەند؟

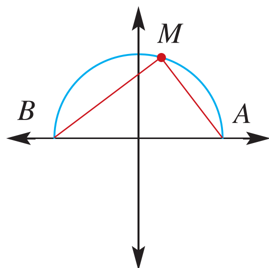


56 **گەردوون** ئارام پلیتیکی بەکارهێنا کونێکی بچووکی تێدا بوو تیشکی خۆری پێدا دەڕۆیشت بۆ بینینی ڕۆژگیران. شاشەیەکی سپی لە دووری 50cm لە کونەکەوە دانا. وێنەی خۆرەکەی دەستکەوت کە تیرەکەی x mm تیری وێنەی خۆرەکە چەند دەبێت ئەگەر ئارام شاشەکە دابنێ لە دووری 100cm؟ 25cm؟ 45cm؟



ڕوانین بۆ پێشەوە

بە هۆی شیکارکردنی پرسیارەکانی 57 تا 59 دەیسەلمێنێت کە ئەو چێوەگۆشەیەی لە نیوەی بازنەیەکدا کێشراوە گۆشە وەستاوە، وێنەی بەرامبەر بەکاربهێنە.



57 هاوکێشەی ئەو بازنەیەی کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و نیوەتیرەکەی r ، بەکاربهێنە بۆ ڕوونکردنەوەی ئەوەی کە پۆتانی خاڵێک m لە خاڵەکان بریتییە لە $\left(a, \sqrt{r^2-a^2}\right)$.

58 لاری هەریەک لە دوو ڕاستەهێڵی MA ، MB بدۆزەوە.

59 بیسەلمێنە کە چێوەگۆشە وەستاوە (لە بیرت بێت: ئەگەر دوو ڕاستەهێڵ ئەستوون بن ئەوا ئەنجامی لێکدانی لارییەکانیان یەکسانە بە ___؟___؟

بەش پرۆژەی

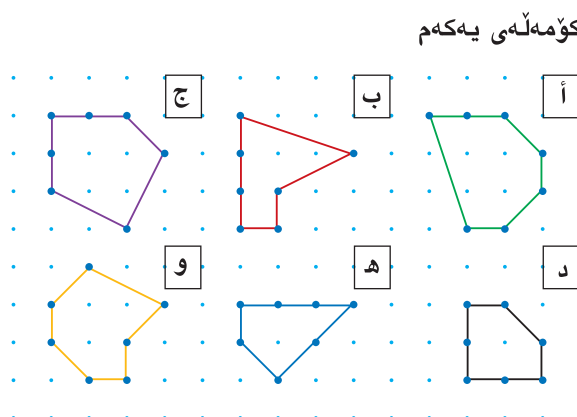
بیرکاری سەرسامکەر

ئەم پرۆژەیە هانت دەدات بۆ گەیشتن بە ڕێسایەك كە یارمەتیت دەدات ڕووبەری چەند لایەکی کێشراو لە سەر کاغەزێکی خاڵدار (بیانی) بدۆزیتەوە. بە دانانی ئەوەی كە هەموو سەرەکانی چەندلاکە دەکەونە سەر خاڵەکانی کاغەزەکە. لە دواییدا سەرسام دەبێت بەبوونی تەنها ڕێسایەك کە دەگونجێت بۆ هەموو چەندلایەك. لەدوایدا کارەکە ئەنجام بدە بەکاری هەرەوەزی لەگەڵ برادەرەکانت لە گرووپی کارکردندا. باشتروایە کارەکە لە نێوان خۆتاندا دابەش بکەن.

چالاکی 1

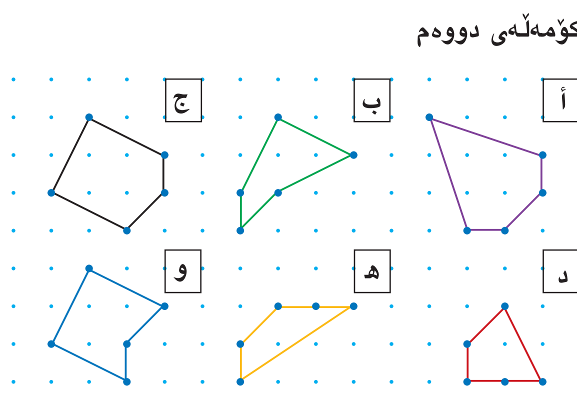
ڕووبەری هەریەك لەم چەندلایەنەی خوارەوە بدۆزەوە. هەستە بەم کارە بە دروستکردنی خشتەکە و تەواوکردنی. N_b هێمایەکە بۆ ئەو خاڵانەی كە دەکەونە سەر چێوەی چەندلایەك N_i هێمایەکە بۆ ئەو خاڵانەی کە دەکەونە ناو چەندلایەکە A هێمایەکە بۆ ڕووبەری چەندلایەکە.

کۆمەڵەی یەکەم



کۆمەڵەی یەکەم			
	N_b	N_i	A
(أ)	7	4	6.5
(ب)			
(جـ)			
(د)			
(هـ)			
(و)			

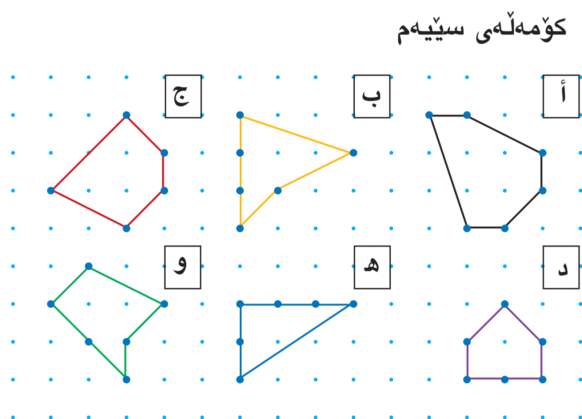
کۆمەڵەی دووەم



کۆمەڵەی دووەم			
	N_b	N_i	A
(أ)			
(ب)			
(جـ)			
(د)			
(هـ)			
(و)			

کۆمەڵەی سێیەم			
A	N_i	N_b	
			(أ)
			(ب)
			(جـ)
			(د)
			(هـ)
			(و)

کۆمەڵەی سێیەم



چالاکی 2

بۆ دۆزینەوەی یاسایەك پاسادانی ئەوە بکە کە ژمارەی هەموو ئەو خاڵانەی دەکەونە سەر چێوەی هەموو چەندلاکان هەمان ژمارەیە.

1 ئەو شێوازە چیە کە یارمەتیت دەدات بۆ دۆزینەوەی رووبەرەکە؟

2 ئەو شێوازە بنووسە، کە دۆزیوتەوە، بە شێوەی یاسایەك.

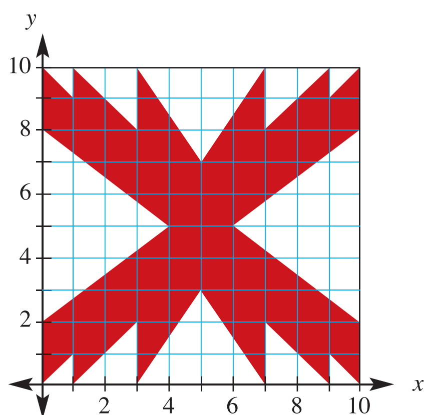
3 ئەو یاسایەی نوسیووتە پاسادان بکە بە رێگای کێشانی ژمارەیەك چەندلا لەسەر کاغەزی خاڵدار (بەیانی) و هەژمێری رووبەرەکانیان بکە.

تۆ یەکەم کەس نیت ئەو یاسایە بدۆزیتەوە. پێش تۆ زانا جۆرج پێك ساڵی 1899ز دۆزیویەتیەوە.

چالاکی 3

شێوەی بەرامبەر بەکاربهێنە

بەشێوەی رەمەکی ئەگەر خاڵێك لەسەر کاغەزی بەیانی هەڵبژێری ئەگەری ئەوەی ئەو خاڵە لە خاڵە رەنگکراوەکان بێت چەندە؟



7

پێداچوونەوەی بەش

ئەم بۆشاییانەی خوارەوە بە دەستەواژەی گونجاو پڕبکەوە.

1 یەکتربڕینی دوو ڕاستەهێڵ پێکدێت لەیەك ___؟___

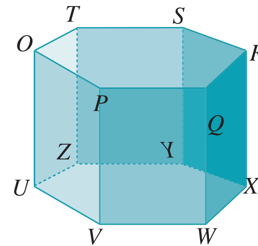
2 یەکتربڕینی دوو ڕووتەخت پێکدێت لەیەك ___؟___

3 بە دوو خاڵی جیاوازدا تەنها یەك ___؟___ دەڕوات.

4 بەسێ خاڵ کە لەڕێکی یەکترنەبن تەنها یەك ___؟___ دەڕوات.

5 ئەگەر دوو خاڵی جیاواز بکەونە ڕووتەختێك، ئەوا ئەو ڕاستەهێڵەی بەو دوو خاڵە دادەڕوات ___؟___

ئەو پوازکە وەستاوە بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکان لە 6 بۆ 9 .



6 دوو ڕووی تەریب ناوبنێ

7 دوو ڕووی ئەستون ناوبنێ

8 دوو لای تەکولۆ ناوبنێ

9 لایەك و ڕوویەکی ئەستون ناوبنێ

10 وێنەیەکی بینراو بۆ پوازکێکی وەستاو کە بنکەکەی لاکێشە بێت دروست بکە بەمەرجێك خاڵی پوکانەوە بکەوێتە لای ڕاستی پوازکەکە.

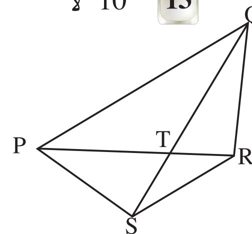
11 وێنەیەکی بینراو بۆ پوازکێکی وەستاو کە بنکەکەی لاکێشە بێت دروست بکە بەمەرجێك خاڵی پوکانەوەی لە پشت پوازکەکە بێت

ناوی ئەم چەندلایانە چیە؟

12 8 لا

13 10 لا

14 12 لا



شێوەکەی سەرەوە بەکاربهێنە کاتێك:

$\widehat{PRQ}=90^{o}$ $\widehat{PTQ}=125^{o}$ $\widehat{RQR}=57^{o}$

$\widehat{PSQ}=83^{o}$ $\widehat{RSQ}=30^{o}$

بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 15 تا 18 ، پێوانەی گۆشەکانی هەرسێگۆشەیەك دیاریبکە.

15 سێگۆشەی RST

16 سێگۆشەی PST

17 سێگۆشەی PQR

18 سێگۆشەی PQT

19 سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی هەشت لایەك چەندە؟

20 پێوانەی چەقە گۆشەیەك لە هەشت لایەکی ڕێك چەندە؟

21 پێوانەی گۆشەیەکی ناوەوە لە هەشت لایەکی ڕێك چەندە؟

22 پێوانەی دەرە گۆشەیەك لە هەشت لایەکی ڕێك چەندە؟

وێنەی ئەو پارچە ڕاستەهێڵەی کە دوو سەرەکانی دوو خاڵی $(-2, 1)$ و $(3, 4)$ بن دیاریبکە بە هاوڕێژەی ئەندازەیی کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و ڕێژەکەی.

23 3

24 -1

شێوەکە دروستبکەوە و وێنەکەی بکێشە بە هاوڕێژەی ئەندازەیی کە چەقەکەی خاڵی دیاریکراو و ڕێژەکەی n ە:

25 $n = 3$

26 $n = \frac{1}{2}$

وێنەی ئەم بازنانەی خوارەوە لە ڕووتەختی پۆتاندا بکێشە.

27 $x^2 + y^2 = 49$

28 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$

29 چەقی ئەم بازنەیە $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$ ؟

هاوکێشەی ئەم بازنەیە بدۆزەرەوە کە چەقەکەیان M و نیوەتیرەکەیان r بێت.

30 $M(0, 0)$ ، $r = 1$

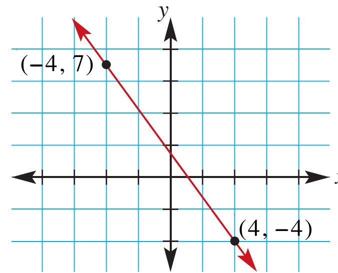
31 $M(6, -2)$ ، $r = 8$



تاقیکردنەوەی بەش

1 کام جووت لە خاڵەکان ڕاستەهێڵێکی ستوون دیاریدەکات لەگەڵ ئەو ڕاستەهێڵەی لە وێنەی خوارەوە کێشراوە ؟

أ (0, 7) و (8, −4)
ب (4, −7) و (−4, 4)
ج (−7, 0) و (4, 8)
د (7, −4) و (−4, 4)



2 کام لەم پێوانانەی خوارەوە سێگۆشە دیاری ناکات؟

أ $A=50^\circ$ ؛ $B=85^\circ$ ؛ $C=45^\circ$
ب $AB=12$ ؛ $BC=7$ ؛ $CA=9$
ج $A=90^\circ$ ؛ $B=65^\circ$ ؛ $C=15^\circ$
د $A=18$ ؛ $BC=6$ ؛ $CA=10$

3 کام پێوانەی خوارەوە پێوانەی گۆشەی نۆلایەکی ڕێکە؟

أ 40°
ب 100°
ج 140°
د 160°

4 ڕۆژان دوو ڕاستەهێڵی کێشا لاری یەکەم = −5 و لاری دووەم = 0.2 بێت ئایا ئەم دوو ڕاستەهێڵە.

أ تەریبن
ب ستوونن
ج ئاسۆیی
د بێجگە لەوانە

5 جێگۆرکێی ئەندازەیی کە خاڵی (x, y) دەگۆڕێت بۆ خاڵی $(-x, -y)$ بریتییە لە:

أ کشانەوە
ب وێنەدانەوەی تەوەرەیی
ج خولانەوە
د هاوڕێژەی ئەندازەیی

6 بسەلمێنە ئەو چوار لایەی سەرەکانی $A(3, -1)$ $B(9, -5)$ $C=(7, -8)$ $D=(1, -4)$ لاکێشەیە؟

سەرەکانی سێگۆشەیەك بریتییە لە **(4, 1)** و **(2, 2)** و **(3, 0)** پۆتانی سەرەکانی وێنەکەی بەم جێگۆرکێیانە دیاریبکە.

7 وێنەدانەوە بە پێی تەوەرەی سینی

8 کشانەوە 3 یەکە بەلای چەپ و یەك یەکە بۆ خوارەوە.

ئەمانە تەواوبکە

9 یەکتربڕینی دوو ڕاستەهێڵ پێکدێت لە ــــــ؟

10 یەکتربڕینی دوو ڕووتەخت پێکدێت لە ــــــ؟

11 ئەو ڕاستەهێڵەی بە دوو خاڵی جیاوازدا لەناو ڕووتەختێکدا دەڕوات ــــــ؟

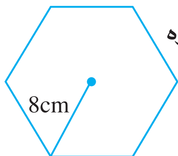
سێگۆشەی ABC بەکاربهێنە کاتێك $A(-1, 8)$ $B(4, 3)$ $C(1, 2)$ بۆ شیکاری پرسیارەکان لە 12 بۆ 15 .

12 لاری هەر لایەك لە لاکانی بدۆزەوە

13 بیسەلمێنە سێگۆشەکە وەستاوە.

14 پۆتانی خاڵەکانی ناوەڕاستی لاکانی بدۆزەوە.

15 درێژی لاکانی بدۆزەوە هەموو وەڵامەکانت نزیکبکەوە لە نزیکترین بەش لە سەد.



16 ڕووبەری چەند لای بەرامبەر بدۆزەوە

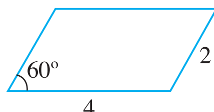
17 پۆتانی وێنەی خاڵی(3, 3) بە خولانەوە چەقەکەی خاڵی بنەڕەت و گۆشەکەی 45° بدۆزەوە؟

18 ئاوات لە سەر ئەم پارچە ڕاستەهێڵەی خوارەوە بەشێوەیەکی هەڕەمەکی خاڵێکی هەڵبژارد. ئەگەری ئەوەی ئەو خاڵە بکەوێتە نێوان 2 و2,5بێت چەندە.



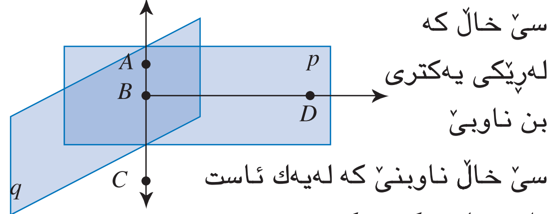
19 پێوانەی چەقە گۆشە لە سێزدەلایەکی ڕێك بدۆزەوە؟

20 ڕووبەری ئەم لاتەریبە بدۆزەوە؟



7 تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

ئەم وێنەی خوارەوە بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکان لە 1 بۆ 9 .



1 یەکتربرینی هەردوو رووتەختی p و q ناوبنێ

2 سێ خاڵ کە لەرێکی یەکتری بن ناوبنێ

3 سێ خاڵ ناوبنێ کە لەیەك ئاست دابن و لە رێکی یەکتری نەبن

4 سێ پارچە راستەهێڵ ناوبنێ.

5 تیشکێك ناوبنێ.

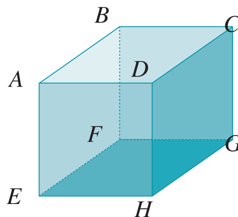
6 دووگۆشەی تەواوکەری یەکتری دیاریبکە.

7 راستەهێڵێك دیاریبکە کە بکەوێتە رووتەختی p

8 راستەهێڵێك دیاریبکە نەکەوێتە رووتەختی q

9 رووتەختی p بە رێگایەکی تر ناوبنێ.

ئەم شێوەیەی خوارەوە بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکان لە 10 بۆ 17



10 جووتێك لە رووەکانی تەریب بەیەکتر ناوبنێ

11 دوو لای تەکولۆ ناو بنێ

12 لایەك و روویەك ناوبنێ بەمەرجێك لایەکە ئەستوون بێت لەگەڵ رووەکە.

13 لایەك وروویێك ناوبنێ بەمەرجێك لایەکە تەریب بێت بەرووەکە.

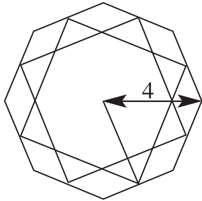
14 دووتۆی گۆشەیەك ناو بنێ وپێوانەکەی دیاریبکە

15 وێنەیەکی بینراو دروستبکە کە یەك خاڵی پوکانەوەی هەبێت بۆ خشتەکێك ئەگەر برانی خاڵە پوکانەوەکە بکەوێتە پشت خشتەکەکە.

16 وێنەیەکی بینراو دروست بکە دوو خاڵی پوکانەوەی بۆ خشتەکێك هەبێت ئەگەر برانی ئاسۆ دەکەویتە پشت خشتەکەکەوە.

17 وێنەیەکی بینراو دروستبکە کە دوو خاڵی پوکانەوە بۆ خشتەکێك هەبێت ئەگەر برانی ئاسۆبکەوێتە پێش خشتەکەکە.

وێنەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 18 بۆ 21 .



18 ژمارەی چەندلا رێکەکان لە شێوەی بەرامبەر چەندە؟ جۆری هەر شێوەیەك دیاربکە.

19 بۆ هەر چەندلایەکی رێك کە دۆزیتەوە لەپرسیارەکەی پێشوو پێوانەکانی گۆشەی ناوەوە و چەقە گۆشە و گۆشەکانی دەرەوە دیاریبکە؟

20 ئەستووندەکی هەشت لاکە بدۆزەرەوە.

21 رووبەری ئەو چەند لارێکانە بدۆزەوە لەپرسیاری 18 دا.

22 **دیزاین** دارتاشێك هەستا بە گەورەکردنی مێزێکی چوارگۆشە بە زیادکردنی پارچە تەختەیەکی لاکێشەیی بۆ رووەکەی. ئایا مێزە تازەکە رێکە؟لایەکسانە؟گۆشەکانی یەکسانن؟

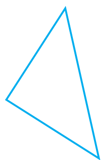
رووی مێزەکە	پارچەی زیادکراو

وێنەی ئەو پارچە راستەهێڵەی کە سەرەکانی (6, −1) (−4, 2) دیاریبکە؟بەم دوو هاورێژە ئەندازەییە.

23 هاورێژە ئەندازەییەکە چەقەکەی خاڵی بنەرەتە و رێژەکەی = -2

24 هاورێژە ئەندازەییەکە چەقەکەی خاڵی بنەرەتە و رێژەکەی = 0.5

25 شێوەی بەرامبەر بکێشە و وێنەی سێگۆشەکە دروستبکە بە هاورێژەی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی دراوە و رێژەکەی = 2 .



وێنەی هەریەك لەم بازنانە بکێشە کە هاوکێشەکانیان ئەمانەن.

26 $x^2+y^2=36$

27 $x^2+y^2=64$

28 $(x+2)^2+(y-3)^2=9$

هاوکێشەی هەریەك لەم بازنانە بدۆزەوە.

29 چەقەکەی خاڵی بنەرەتەو نت = 2

30 چەقەکەی خاڵی $(1, -5)$ وە نت = 4

بەشی هەشتەم

سێگۆشەزانی

Trigonometry

1. شیکاری سێگۆشەی وەستاو.
2. گۆشەکانی خولانەوە.
3. پێوانەی بازنەیی و درێژی کەوانە.
4. هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان.

پرۆژەی بەشەکە

پێداچوونەوە

تاقیکردنەوەی بەش

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

سێگۆشەزانی Trigonometry

بەشی

8

لە نێوان پێوانەکانی لاکانی سێگۆشە و گۆشەکانی پەیوەندی گرنگ هەیە کە زانستێکی کۆن نوێ لێیدەکۆڵێتەوە ئەویش سێگۆشەزانییە.

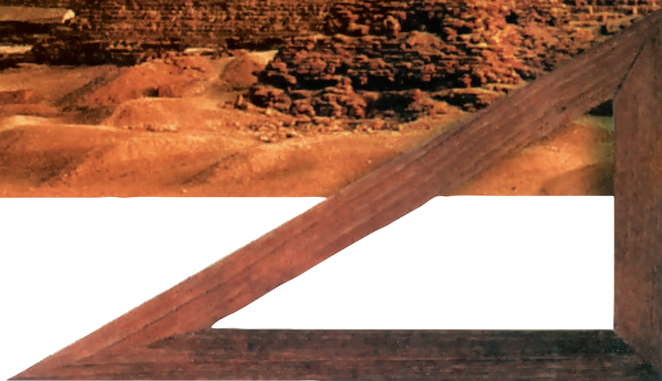
لە دێر زەمانەوە مرۆڤ گرنگی داوە بە سێگۆشەکان. لەم دوو لاپەڕە وێنەکان ئاماژە بۆ ئەوە دەکەن. سێگۆشەزانی بەکارهێنانەکانی زۆرفراوانە لە فیزیا و زانستی گەردوون و تەلارسازی و ئەندازە و ئەوانی تر.

وانەکان

1. شیکارکردنی سێگۆشەی وەستاو.
2. گۆشەکانی خولانەوە
3. پێوانەی بازنەیی و درێژی کەوانە.
4. هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان.

پرۆژەی بەش



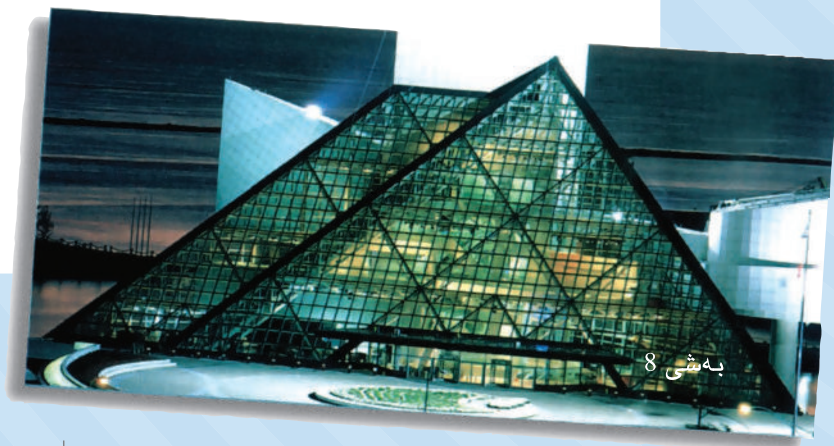



دەربارەی پرۆژەی بەش

بەبۆنەی کردنەوەی پێشانگای جیهانی لە شاری شیکاغۆی ئەمریکی ساڵی 1893 ، جۆرج فیریس چەرخێکی گەورەی دروستکرد، کە بە ناوی خۆیەوە ناسراوە، چەرخەکە خانەخانە کراوە، هەر خانەیەك جێگای چەند کەسێکی لێدەبێتەوە، بە خولانەوەی دۆلابەکە «چەرخەکە» ئەو نەفەرانەی دەگواستەوە لە خوارەوە بۆ سەرەوە و بە پێچەوانەوە. لە ماوەی کارکردنت لە بەشەکە، هەڵدەستیت بە پێشخستنی ئەم سامپڵە (نموونە) بۆ لێکۆڵینەوەی گۆڕانی بەرزبوونەوەی نەفەرەکەی خانەکە بە تێپەڕبوونی کات.

دوای تەواوبوونت لە بەشەکە دەتوانیت:

- سامپڵێکی بیرکاریانە دابنێیت بۆ بەرزی خاڵێك کە دەکەوێتە سەر چێوەی چەرخەکە بەپێی کات.
- ڕوونکردنەوەی هەر پێکهینەرێك لەپێکهێنەرەکانی سامپڵەکە چی دەگەیەنێ لەژیانی ڕۆژانە.
- دیاریکردنی خێرایی خاڵێك لەسەر چیوەی چەرخەکە.



شیکارکردنی سێگۆشەی وەستاو

Solving Right Triangle

وانەی 1

ئامانجەکان

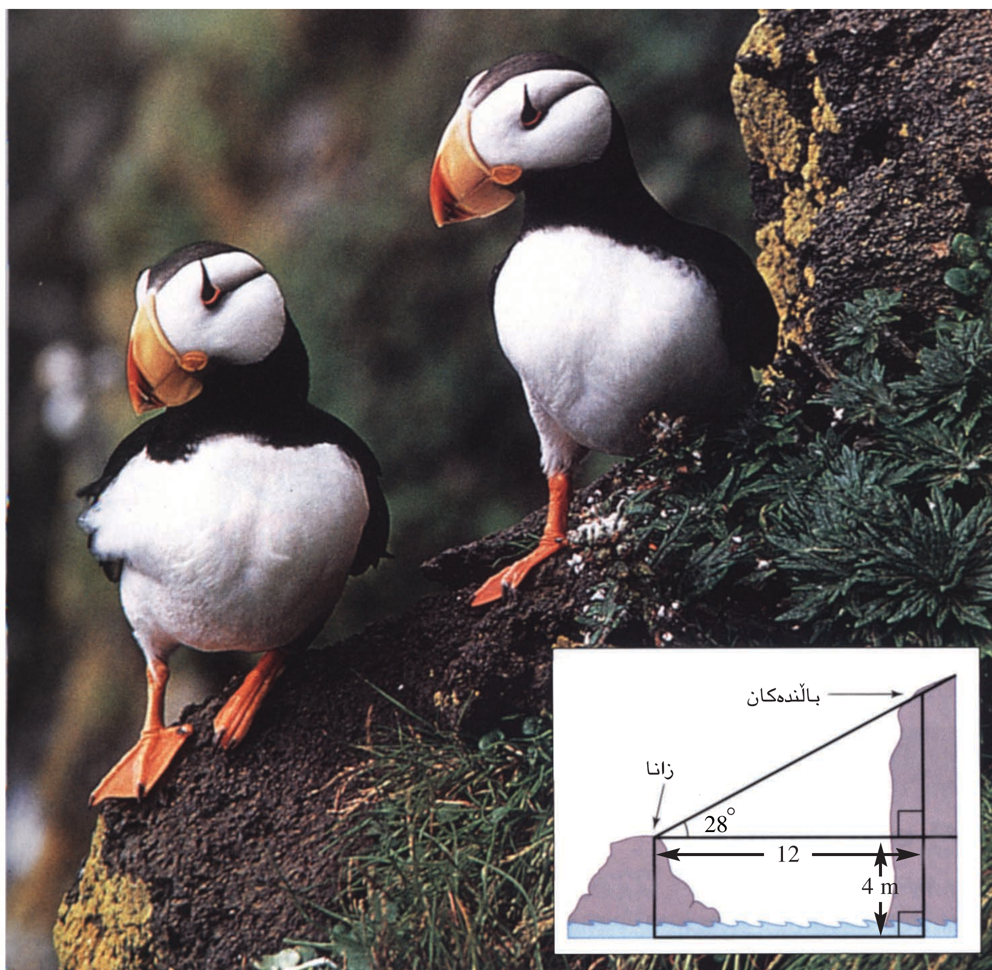
- ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی تیژ هەژمارەدەکات و جیا دەکاتەوە.
- سێگۆشەی وەستاو بەبەکارهێنانی ڕێژە سێگۆشەییەکان شیکاردەکات.

بۆچی؟

دەتوانیت ڕێژە سێگۆشەییەکانی سێگۆشەیەکی وەستاو بەکاربهێنێت بۆ شیکاری ئەو پرسیارانەی لە ژیانی ڕۆژانەدا دێتە ڕێگامان وەك لە دیاریکردنی بەرزی ئەو باڵندانەی لە وێنەکەدا دەرکەوتوون لە ڕووی ئاوەکەوە.

جێبەجێکردنەکان

باڵندەکان



یەکێك لە زاناکان هەستا بەگرتنی وێنەی کۆمەڵە باڵندەیەك لەقەدپاڵی شاخێکدا وەستابوون. بۆ دۆزینەوەی بەرزی ئەو باڵندانە لە ڕووی ئاوەکەوە. زاناکە هەستا بە پێوانی ئەو گۆشەی دروست بووە لە ئەنجامی هێڵی سەیرکردنی بۆ بڵندەکان لەگەڵ هێڵی ئاسۆیی، بینی پێوانەی گۆشەکە 28° زاناکە چۆن ئەم کارەی ئەنجامدا.ئەگەر بزانیت ئەو لە بەرزی 4 m وەستاوە و دووری نێوان ئەو و قەدپاڵی شاخەکە 12m بووە؟

بۆ ئەوەی بەرزی شوێنی باڵندەکان دیاریبکەیت سێگۆشەزانی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەیەك لە گۆشەکانی سێگۆشە وەستاوەکە یان درێژی لایەك لە لاکانی.

بیربکەوە کە ژێی سێگۆشەی وەستاو ئەولایەیە کە بەرامبەر گۆشە وەستاوەکەیە. لەو سێگۆشەی لە لای چەپ کێشراوە، دەبینین $\overline{AB}$ ژێیەو و $\overline{AC}$ **تەنیشت گۆشەی** A و $\overline{BC}$ لای بەرامبەری گۆشەی A .

لای تەنیشت و بەرامبەری گۆشەی B دیاریبکە.

خاڵی چاودێری ✓

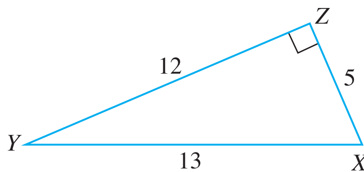
Trigonometric Ratios $\hat{A}$ — **ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی $\hat{A}$**

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{بەرامبەر}}{\text{تەنیشت}} \qquad \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{تەنیشت}}{\text{ژێ}} \qquad \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{بەرامبەر}}{\text{ژێ}}$$

سەرنج بدە: sin A = sine A , cos A = cosine A , tan A = tangent A

نموونە 1

هەرسێ ڕێژە سێگۆشەییەکان بۆ گۆشەی X لەسێگۆشەی بەرامبەر هەژماربکە.



شیکار

$\sin \hat{X} = \frac{YZ}{XY} = \frac{12}{13} = 0.9231$

$\cos \hat{X} = \frac{XZ}{XY} = \frac{5}{13} = 0.3846$

$\tan \hat{X} = \frac{YZ}{XZ} = \frac{12}{5} = 2.4$

هەوڵبدە هەرسێ ڕێژە سێگۆشەییەکان بۆ گۆشەی Y لە سێگۆشەکەی سەرەوە هەژماربکە وەڵامی تەواوی بدەوە وەڵامەکانت لە نزیکترین بەش لە دەهەزار نزیکبکەرەوە.

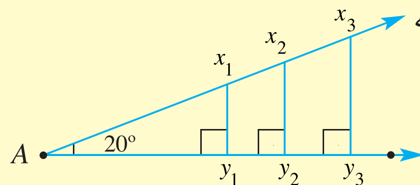
چالاکی

دۆزینەوەی ڕێژەی سێگۆشەکان Explrering Trigonometric Ratios

پێویستیت بە پرگالێك و ڕاستەیەك و بژمێرێك هەیە.

خشتەیەك دروستبکە وەك خشتەکەی خوارەوە.

1. ئەوەی لە خشتەکەدایە بینووسەوە. لەدوایدا تەواوبکە لە ڕێگای پێوانی لایە دیاریکراوەکان لەگەڵ دۆزینەوەی ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی A .



2. ئایا ئەو بەهایانەی نووسیوتە لە ستونی $\sin A$ بە نزیکەیی یەکسانن؟ کارەکە لە ستونی $\cos A$ وایە؟ لەستوونی $\tan A$ وایە؟

سێگۆشە	بەرامبەر $\hat{A}$	تەنیشت $\hat{A}$	ژێ	$\sin \hat{A} = \frac{\text{بەرامبەر}}{\text{ژێ}}$	$\cos \hat{A} = \frac{\text{تەنیشت}}{\text{ژێ}}$	$\tan \hat{A} = \frac{\text{بەرامبەر}}{\text{تەنیشت}}$
Ax_1y_1						
Ax_2y_2						
Ax_3y_3						

3. ئەو ئەنجامانەی دەستتکەوتووە بەراوردی بکە لەگەڵ ئەنجامەکانی هاوڕێکانت لە پۆلەکەدا.

4. ئایا دەتوانیت گریمانەیەك دابڕێژیت دەربارەی هەرسێ ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی A ؟

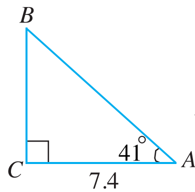
خاڵی چاودێری ✓

بەهاکانی ڕێژەی سێگۆشەیی گۆشەیەکی تیژ ناگۆڕێت بە گۆڕانی سێگۆشە وەستاوە بەکارهاتووەکە، هەروەك لە چالاکی سەرەوە بۆت دەرکەوت، بەهاکانی ئەم ڕێژانە تەنها بە پێوانەی گۆشەکە دیاری دەکرێت.

دەتوانیت بەهاکانی ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەکەت دەست بکەوێت بەزانینی پێوانەکەی بەبەکارهێنانی بژمێری زانستی. و دەتوانیت ڕێژە سێگۆشەییەکان بەکاربهێنیت بۆ دۆزینەوەی هەندێك لە لاکانی سێگۆشەی وەستاو هەروەك نموونەی 2 ڕوونیدەکاتەوە.

نموونە 2

دریژی لاکانی سێگۆشەی بەرامبەر بدۆزەرەوە.



شیکار

لە بەر ئەوەی دریژی AC زانراوە پێویستە دریژی هەریەك لە $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ بدۆزینەوە.

$\cos A$ بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی دریژی AB

$\tan A$ بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی دریژی BC

$$\cos A = \frac{AC}{AB} \qquad \tan A = \frac{BC}{AC}$$

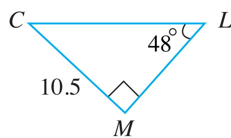
$$\cos 41^\circ = \frac{7.4}{AB} \qquad \tan 41^\circ = \frac{BC}{7.4}$$

$$AB = \frac{7.4}{\cos 41^\circ} \qquad BC = 7.4 \times \tan 41^\circ$$

$$BC \approx 7.4 \times 0.8693$$

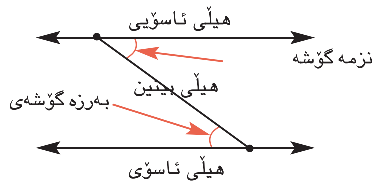
$$AB \approx \frac{7.4}{0.7547} \approx 9.8 \qquad BC \approx 6.4$$

هەوڵبدە دریژی لاکانی سێگۆشەی بەرامبەر بدۆزەرەوە



بەرزە گۆشە Angle of Elevation ئەو گۆشەیە کە دەکەوێتە نێوان هێڵی ئاسۆیی لەگەڵ هێڵی بینینی خاڵێکی بەرزتر لە خۆی.

نزمە گۆشە Angle of Depression ئەو گۆشەیە کە دەکەوێتە نێوان هێڵی ئاسۆیی لەگەڵ هێڵی بینینی خاڵێکی نزمتر لە خۆی.



نموونە 3

بەگەڕانەوە بۆ پرسیاری باسکراو لە سەرەتایی وانەکە.بەرزی شوێنی باڵندەکان لە سەر ڕووی ئاوەکە بدۆزەرەوە.

جێبەجێکردنەکان

باڵندەکان

شیکار

$\overline{BE}$ بەرزی شوێنی باڵندەکانە لەڕووی ئاوەکەوە.

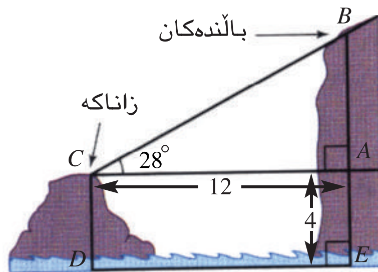
لەبەرئەوەی $BE = BA + AE$

وە لەبەر ئەوەی $AE = CD = 4\text{m}$ ، کەواتە $\tan 28^\circ = \frac{AB}{12}$

$$AB = 12 \times \tan 28^\circ$$

$$AB \approx 6.38^\circ$$

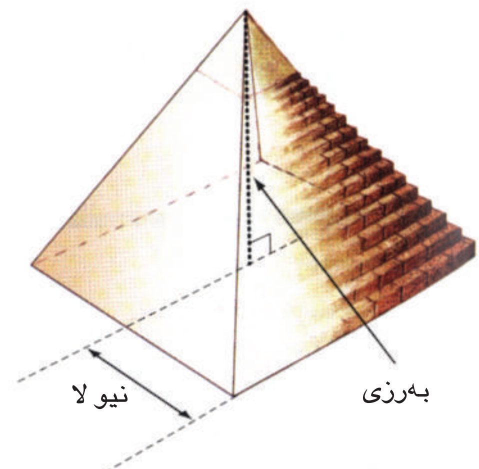
$$BE = BA + AE = 6.38 + 4 = 10.38\text{m}$$



دەروازەیەك لەسەر ڕۆشنبیری فیرعەونییەکان فیرعەونییەکان پەیوەندیەکی سێگۆشەیەیان بەکارهێناوە ناویان ناوە سیکد کە لاری ڕووی هەرەمەکە دەگەیەنێت.

$$\text{سیکد Cotangent} = \frac{\text{دوو ئەوەندەی پێوانی لای بنکەی هەرەم}}{\text{7 ئەوەندەی بەرزی هەرەمەکە}}$$

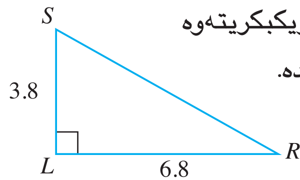
تێبینی ئەوە بکە کە سیکد هەڵگەڕاوەی سایەی (هەڵگەڕاوەی tan) گۆشەکەیە کە پێی دەوترێت سایەتەواوی گۆشەکە Cotangent یان cot گۆشەکە بەکورتکراوەیی.





ئەگەر بمانەوێت سێگۆشەیەکی وەستاو شیکاربکەین پێویستە پێوانەی گۆشەکانی سێگۆشەکە بدۆزینەوە لەگەڵ درێژی لا نەزانراوەکانی سێگۆشەکە. لە کارەکەتدا بژمێری زانستی بەکاربهێنە، بۆ دۆزینەوەی پێوانەی ئەو گۆشەی کەیەکێك لە ڕێژە سێگۆشەیەکانی دەزانیت. ئەو ڕاستییە بەکاربهێنە کە: کۆی گۆشەکانی ناوەوەی سێگۆشەکە دەکاتە 180° واتە کۆی هەردوو گۆشە تیژەکە لە سێگۆشە وەستاوەکە 90°.

نموونە 4



سێگۆشەی بەرامبەر شیکاربکە بە دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەکانی کە نزیکبکریتەوە لە نزیکترین پلە و درێژی ژێیەکەی نزیکبکەیتەوە بۆ نزیکترین بەش لە دە.

ئەگەر زانیت $\tan 28 = 0.55$

شیکار

1. $\tan R = \frac{3.8}{6.8}$

$R = \tan^{-1}\frac{3.8}{6.8} \approx 29^\circ$

2. لەبەرئەوەی کۆی پێوانەی دوو گۆشە تیژەکە 90° ئەوا $90^\circ - 29^\circ = 61^\circ$

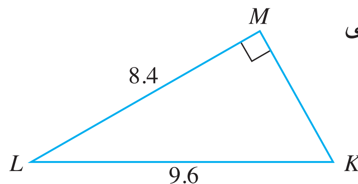
3. بیردۆزی فیثاگۆرس بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی درێژی ژێیەکە.

$$(RS)^2 = (6.8)^2 + (3.8)^2$$

$$RS = \sqrt{(6.8)^2 + (3.8)^2}$$

$$RS \approx 7.8$$

هەوڵبدە



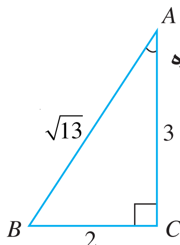
سێگۆشەی بەرامبەر شیکاربکە بە دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەکانی بە نزیککردنەوەی بۆ نزیکترین پلە و درێژی لایەکەی بۆ نزیکترین بەش لە دە.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە

1. چۆن سێگۆشەکە شیکاردەکەیت لە نموونەی 4 بە دەستپێکردن بە دۆزینەوەی ژێیەکەی، لە دواتدا بەبەکارهێنانی cos یان sin بۆ دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەکان؟
2. لە دوای دۆزینەوەی پێوانەی R° ئایا دەتوانی درێژی ژێیەکە بدۆزیتەوە بەبێ بەکارهێنانی بیردۆزی فیثاگۆرس؟

ڕاهێنـــــــان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

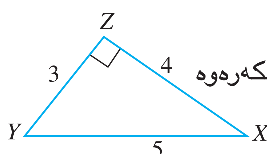


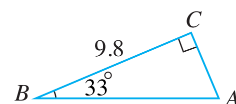
1 چۆن ڕێژە سێگۆشەییەکان بۆ گۆشەی A لە سێگۆشەی بەرامبەر دەدۆزێتەوە

2 چۆن پێوانەی دووگۆشەی A و B لە سێگۆشەی بەرامبەر دیاریدەکەیت.

3 جیاوازی نێوان $\sin^{-1} A$ و $\frac{1}{\sin A}$ چییە؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو





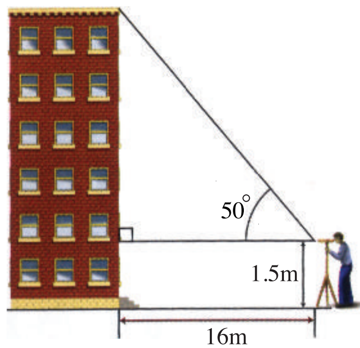
4 ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی X لە سێگۆشەی لای چەپ بدۆزەرەوە، وەڵامەکەت بە تەواوی بدەرەوە، بۆ نزیکترین بەش لە دەهەزار نزیکبکەرەوە

5 درێژی هەردوو لای AC و BA لە سێگۆشەی لای ڕاست بدۆزەرەوە.

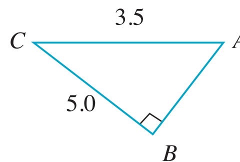
جێبەجێکردنەکان



6 **ئەندازە** ئەندازیاریك لە دووری m16 لە تەلاریکەوە. وەستاوە سەیری بەرزترین خاڵی تەلارەکەی دەکرد بە دووربینێك لەبەرزی 1.5 m لەزەویەوە دانرابوو بەرزی تەلارەکە چەندە ئەگەر پێوانەی بەرزە گۆشەکە 50° بێت؟



7 ئەم سێگۆشەیەی خوارەوە شیکاریکە. پێوانەی گۆشەکان بدۆزەرەوە بە نزیکی بۆ نزیکترین پلە و دریژی لای AB بەنزیکی بۆ نزیکترین دە.



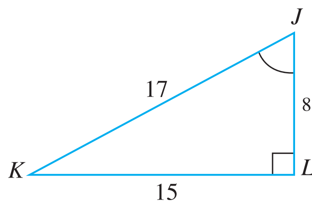
ڕاهێنان و جێبەجێکردن

سێگۆشەی JKL بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای داواکراو. با وەڵامەکان تەواوبن.لە دوایدا بۆ نزیکترین بەش لە دەهەزار نزیکبکەوە.

8 $\sin \hat{K}$ **9** $\sin \hat{J}$

10 $\cos \hat{J}$ **11** $\cos \hat{K}$

12 $\tan \hat{K}$ **13** $\tan \hat{J}$

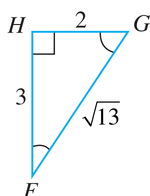


سێگۆشەی FGH بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای داواکراو. با وەڵامەکان تەواوبن.لە دوایدا بۆ نزیکترین بەش لە دەهەزار نزیکبکەوە.

14 $\sin \hat{G}$ **15** $\sin \hat{F}$

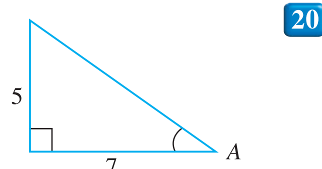
16 $\cos \hat{G}$ **17** $\cos \hat{F}$

18 $\tan \hat{G}$ **19** $\tan \hat{F}$

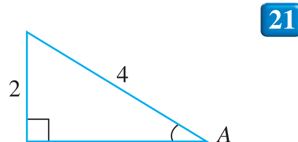


پێوانەی گۆشەی A بەبەکارهێنانی بژمێر (ئەگەر هەبێت) بدۆزەرەوە.

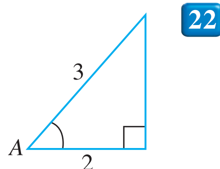
20



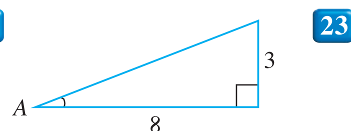
21



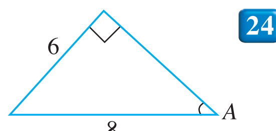
22



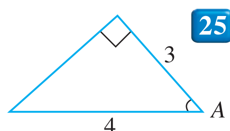
23



24

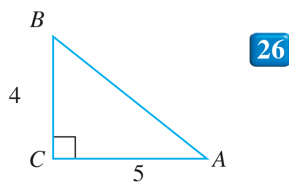


25

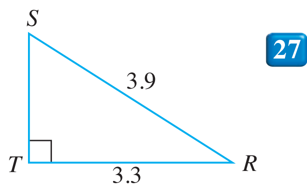


ئەم سێگۆشانە شیکار بکە. پێوانەی گۆشەکە بدۆزەرەوە بە نزیکی بۆ نزیکترین پلە و درێژی لایەکی بۆ نزیکترین بەش لە دەهەزار نزیکبکەوە.

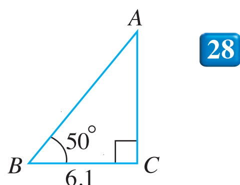
26



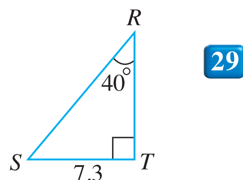
27



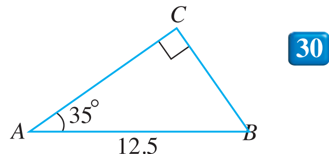
28



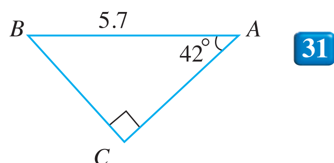
29



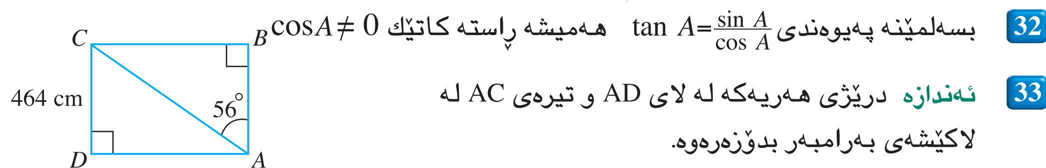
30



31



32 بسەلمێنە پەیوەندی $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$ هەمیشە ڕاستە کاتێك $\cos A\neq 0$



33 **ئەندازە** درێژی هەریەکە لە لای AD و تیرەی AC لە لاکێشەی بەرامبەر بدۆزەرەوە.

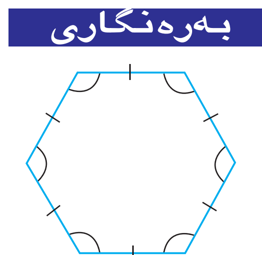
جێبەجێکردنەکان

34 **جوانکاری ماڵەکان** باوکی گوڵ بەهار ویستی (بالەکۆنێك) دروستبکات کە شێوەی سێگۆشە وەستاوی هەبێت ویستی ژێی سێگۆشەکە 6m بێت و دوو لای گۆشە وەستاوەکە لە درێژیدا یەکسان بن.

أ درێژی هەریەکە لە دوو لای گۆشە وەستاوەکە بدۆزەرەوە.

ب ڕووبەری بالەکۆنەکە بدۆزەرەوە.

بەرەنگاری



35 **بینا** بەڕێوەبەری باخچەی گشتی ویستی هۆڵێك بۆ پشوودان دروست بکات بنکەکەی بە شێوەی شەشلایەکی ڕێك بێت و درێژی لایەکی 10 m بێت، ئەگەر تێچوونی دارشتنی بنکەکە 170 هەزار دینار بێت بۆ هەر مەترە چوارگۆشەیەك. ڕێژە سێگۆشەیەکان بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بری تێچوونی دارشتنی بنکەکە.



ڕوانینێك بۆ دواوە

پلەی هەریەك لەم زۆر ڕادەدارانە دیاریبکە.

36 $3x^2-5x^8+4x^3+2$

37 $(x^2-9)(x^3+4)$

شیتەڵ بکە

38 $2x^3-18x$

39 $3x^3-7x^2+2x$

هەریەك لەم برانەی خوارەوە بە سادەترین شێوە بنووسە، دوای ڕێژەکردنی ژێرە.

40 $\frac{3}{\sqrt{2}}$

41 $\frac{1}{\sqrt{3}}$

42 $\frac{5}{1-\sqrt{2}}$

43 $\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

ناوەندە ژمێرەیی هەریەکە لەم بەهایانەی خوارەوە بدۆزەرەوە لە دوایدا لادانی پێوانەکەیان بدۆزەرەوە

44 110; 119; 125; 130; 78; 100; 113; 121; 103; 99; 122; 107; 102

45 22; 26; 28; 17; 19; 24; 36; 25; 14; 17; 46; 53; 25; 18; 34; 12

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

46 ئەندازە ئەگەر خاڵێك بخولێتەوە بە دەوری چەقی خولانەوە 360°، ئەوا ڕێڕەوەکەی بازنەیەکی تەواو دەبێت. ئەو گۆشە خولانەوە بدۆزەرەوە کەوا لە ڕێڕەوی خاڵەکە دەکات ببێتە نیوە بازنەیەك؟ چارەکە بازنەیەك؟

وانەی
2

گۆشەکانی خولانەوە Angles of Rotation



بۆچی؟ دەتوانیت گۆشەکانی خولانەوە بەکاربهێنیت بۆ باسکردنی تێکڕای خولانەوەی بزوێنەری فڕۆکەیەکی پەروانەدار.

ئامانجەکان

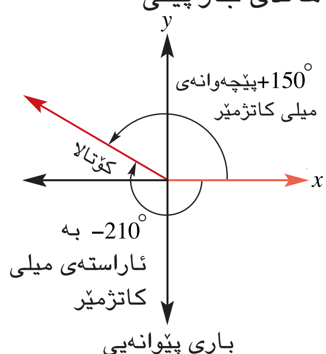
- گۆشەی گەڕانەوە بۆ گۆشەیەك دیاریدەکات.
- ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەیەك لە باری پێوانەییدا دیاریدەکات.

جێبەجێکردنەکان

فڕۆکەوانی

پەروانەی یەکێك لە فڕۆکەکان 1100 خول دەخولێتەوە لە خولەکێکدا، ئەو خاڵەی لەسەر پەروانەی فڕۆکەکەیە چەند پلە دەخولێتەوە لە چرکەیەکدا؟

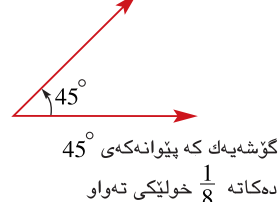
ئەگەر پێناسەی گۆشە لە ئەندازەدا بریتی بێت لەو شێوەی کە دروست دەبێت لە ئەنجامی بەیەکگەیشتنی دوو تیشك هاوبەشبن لە خاڵی بنەڕەتدا. ئەوا پێناسەکەی لە سێگۆشەزانیدا بریتییە لە **خولانەوەی تیشکێك** بەدەوری خاڵی بنەڕەتدا لە شوێنێکەوە بۆ شوێنێکی تر. هەر شوێنێکی تیشکەکە کە دەخولێتەوە لەگەڵ شوێنی دەستپێکردنی گۆشەکە، گۆشەیەك دیاریدەکات پێی دەوترێت گۆشەی خولانەوە. **Angle of Rotation** بیرکاریزانەکان هەندێ جار پیتی یۆنانی θ« ثیتا » بەکاردەهێنین بۆ ناولێنانی گۆشەی خولانەوە.



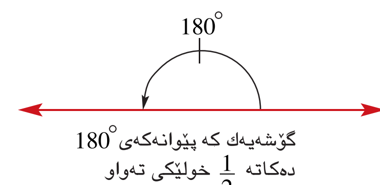
جێگای دەستپێکردنی تیشکەکە پێی دەوترێت **لای یەکەمی** گۆشەو **Initial side** شوێنی وەستانەکەی پێی دەوترێت **کۆتالا Terminal side** . گۆشەکە لە باری پێوانەییدا دەبێت کاتێك سەرەکەی لە خاڵی بنەڕەتدا دەبێت لە ڕووتەختی پۆتاندا و لای یەکەمی دەکەوێتە سەر نیوەی موجەب لە تەوەرەی سینی.

ئەگەر خولانەوەکە بە ئاراستەی پێچەوانەی جولانەوەی میلی کاتژمێر ڕوبدا ئەوا پێوانەی گۆشەکە **موجەب Positive** دەبێت. وپێوانەی گۆشەکە **سالب Negative** دەبێت ئەگەر خولانەوەکە بە ئاراستەی جولانەوەی میلی کاتژمێر بێت.

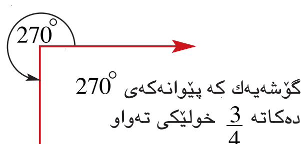
(پلە) دادەنرێت بەگرنگترین پێوانەی گۆشە و ئاماژەی بۆ دەکرێت بەهێمای(°). و لەبەر ئەوەی ئەو گۆشەیەی دەستمان دەکەوێت لە خولێکی تەواوی تیشکەکە دەکاتە°360 ئەوا پلە پێناسە دەکرێت بەوەی پێوانەی گۆشەی پەیدابوو لە خولانەوەی تیشکەکە لە $\frac{1}{360}$ لە خولێکی تەواو.



گۆشەیەك کە پێوانەکەی 45° دەکاتە $\frac{1}{8}$ خولێکی تەواو



گۆشەیەك کە پێوانەکەی 180° دەکاتە $\frac{1}{2}$ خولێکی تەواو



گۆشەیەك کە پێوانەکەی 270° دەکاتە $\frac{3}{4}$ خولێکی تەواو

خاڵی چاودێری ✓

ئاڕاستەی خولانەوەیەك كە گۆشەكەی -90° و 120° چییە؟ ئەو بەشەی كە هەریەكە لەم دوو خولانەوەیە لە خولێكی تەواو پێكیدێنێت چەندە؟

نموونە 1



بەگەڕانەوە بۆ پرسیارەكەی سەرەتای وانەكە.
خاڵێك لەسەر پەروانەی ئەو فڕۆكەیە لە چركەیەكدا چەند پلە دەخولێنەوە.

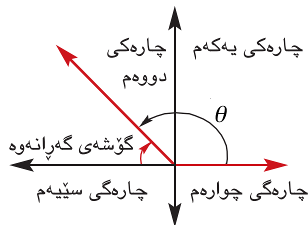
شیكار

پەروانەكە 1100 خول لە خولەكێكدا دەسوڕێتەوە، لەبەر ئەوە خاڵەكە لەسەر پەروانەی فڕۆكەكە $1100\times360^\circ = 397000^\circ$ دەخولێتەوە لە خولەكێكدا. و بەم شێوەیە خولانەوەی خاڵەكە لەسەر پەروانەی فڕۆكەكە لەیەك چركەدا $\frac{396000^\circ}{60} = 6600^\circ$

هەوڵبدە پەیكەكانی مۆسیقا 33.3 خول لە خولەكێكدا دەخولێنەوە. خاڵێك لەسەر پەیكەكە لە یەك چركەدا چەند پلە دەخولێتەوە؟

لەوانەی سێیەمدا فێردەبێت چۆن هەژمێری ڕێژە سێگۆشەییەكانی گۆشەیەك لەباری پێوانەیی بكەیت. كاتێك پێوانەكەی لە 90° زیاتر دەبێت (یان كەمتر دەبێت لە سفر) بۆ ئەوەی بتوانیت ئەمە بكەیت لە مەودوا پێویستت بە دیاریكردنی پێوانەی گۆشەی گەڕانەوە دەبێت بۆ گۆشەكە لەباری پێوانەییدا.

ئەگەر θ گۆشەیەك بێت لە باری پێوانەییدا ئەوا (گۆشەی گەڕانەوەی) ئەو گۆشە تیژە موجەبەیە كە پێكدێت لە كۆتالا گۆشەكە و بەشێك لە تەوەرەی سینی (موجەب یان سالب) كە نزیكترە لێیەوە. ئەگەر بزانی كە بەشی موجەب لە تەوەرەی سینی لە هەردوو چارێگی یەكەم و چوارەم دایە. و بەشی سالب لە دوو چارێگی دووەم و سێیەم دایە.



نموونە 2

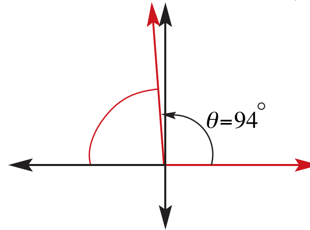
گۆشەی گەڕانەوە بۆ هەریەك لەم گۆشانە چەندە!

أ $\theta = 94^\circ$ ب $\theta = 245^\circ$

ج $\theta = 290^\circ$ د $\theta = -110^\circ$

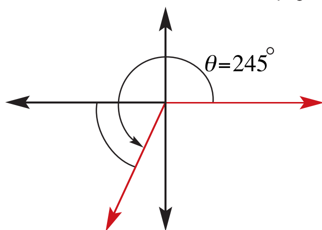
شیكار

أ كۆتالا گۆشەی $\theta = 94^\circ$ لە چارێگی دووەم دایە. بەشی سالیب لە تەوەرەی سینی بەكاربهێنە .

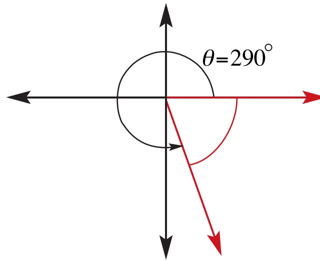
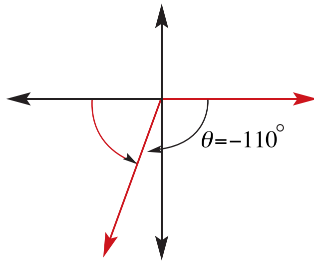


پێوانەی گۆشەی گەڕانەوە $|180^\circ-94^\circ| = 86^\circ$

ب كۆتالا گۆشەی $\theta = 245^\circ$ لە چارێگی دووەم دایە بەشی سالیب لە تەوەرەی سینی بەكاربهێنە.



پێوانەی گۆشەی گەڕانەوە $|180^\circ-245^\circ| = 65^\circ$

ج کۆتالا گۆشەی $\theta=290^\circ$ دەکەوێتە چارێگی چوارەم. بەشی موجەب لە تەوەرەی سینی بەکاربهێنە .	د کۆتالا گۆشەی $\theta=-110^\circ$ دەکەوێتە چارێگی سێیەم بەشی سالیب لە تەوەرەی سینی بەکاربهێنە.
	
پێوانەی گۆشەی گەڕانەوە $\lvert 360^\circ-290^\circ\rvert=70^\circ$	پێوانەی گۆشەی گەڕانەوە $\lvert 180^\circ-110^\circ\rvert=70^\circ$

هەوڵبدە گۆشەی گەڕانەوە چەندە بۆ گۆشەی $\theta=315^\circ$، و گۆشەی $\theta=-235^\circ$ لەباری پێوانەییدا؟

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە ژمارەی ئەو گۆشانەی دەکەونە نێوان 0° و 360° چەندە کە لە هەمان گۆشەیی گەڕانەوەدا بەشداری دەکەن.

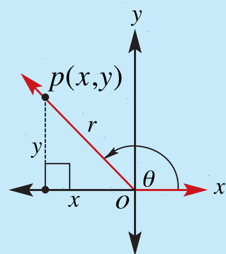
ئەگەر واتدانا کە x و y پۆتانی خاڵێکن لەسەر کۆتالا گۆشەیەك لەباری پێوانەیی. ئەوا لە توانات دەبێت نیشانەی هەر ڕێژەیەکی سێگۆشەیی کە دەگەڕێتەوە بۆ گۆشەیەك دیاریبکەیت.

ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشە θ

ئەگەر $p(x, y)$ خاڵێك بێت لە سەر کۆتالا گۆشەی θ لە باری پێوانەییدا.
ئەوا دووری نێوان P و خاڵی بنەڕەت لەڕووتەختی پۆتاندا دەکاتە:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r} \qquad \cos\theta=\frac{x}{r} \qquad \tan\theta=\frac{y}{x} \qquad x\neq 0$$



نموونە 3

خاڵی $P(-2,-3)$ دەکەوێتە سەر کۆتالا گۆشەی θ لەباری پێوانەیی. هەژمێری ڕێژە سێگۆشەییەکانی بکە

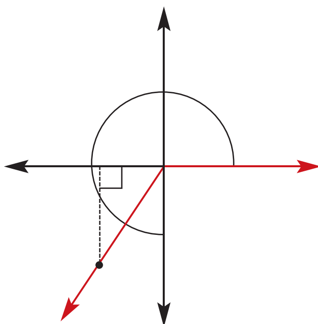
شیکار

وێنەیەکی بۆ بکێشە $x=-2 \quad y=-3$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-3}{\sqrt{13}} \qquad \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-2}{\sqrt{13}}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$$



هەوڵبدە خاڵی $P(3,-5)$ دەکەوێتە سەر کۆتالا گۆشەی θ لە باری پێوانەییدا، هەژمێری ڕێژەی سێگۆشەییەکانی بکە.

چالاكی

دۆزینەوەی نیشانەكانی ڕێژە سێگۆشەییەكان لە چارێگەكانی ڕووتەختی پۆتاندا
Exploring the Sign of Trigonometric Ratios

ڕێژە سێگۆشەیی	چارێكی			
	یەكەم	دووەم	سێیەم	چوارەم
$\sin\theta$	+			
$\cos\theta$				
$\tan\theta$				

1. خشتەی بەرامبەر دروستبكە و تەواوی بكە و نیشانەی هەر ڕێژەیەكی سێگۆشەیی بۆ گۆشەی θ دیاریبكە لە باری پێوانەییدا. بەپێی ئەو چارێگەی كۆتالا دەكەوێتە ناویەوە.

2. كۆتالا گۆشەی θ دەكەوێتە كام چارێگەوە، ئەگەر $\sin\theta=-\frac{2}{7}$ ؛ $\cos\theta=-\frac{2}{7}$ ؛ $\tan\theta=-\frac{1}{5}$ هەموو وەڵامەكانی كە لە توانادایە باسبكە.

3. ئایا r (ژێ)كاردەكاتە سەر نیشانەی هەریەك لەڕێژە سێگۆشەییەكان؟هۆی وەڵامەكەت ڕوونبكەوە.

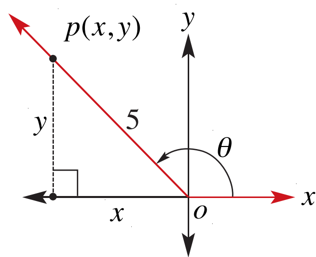
4. كام لە دوو گۆڕاوی x یان y نیشانەی $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ ، $\tan\theta$ دیاریدەكەن؟

خاڵی چاودێری ✓

ئەگەر زانیت كۆتالا گۆشەی θ لە باری پێوانەییدا دەكەوێتە كام چارێگەوە و بەهای ڕێژەیەك لە سێ ڕێژە سێگۆشەكانت زانی. دەتوانیت هەژمێرەی دوو ڕیژەكەی تر بكەیت.

نموونە 4

$\sin\theta$، $\tan\theta$ هەژماربكە ئەگەر بزانی گۆشەیθلە باری پێوانەییدا و كۆتالاكەی دەكەوێتە چارەگی دووەم $\cos\theta=-\frac{3}{5}$.



شیكار

وێنەكە بكێشە و هەژمێری پۆتانی خاڵی P بكە لەبەرئەوەی $\cos\theta=-\frac{3}{5}<0$ ئەوا x سالبە كەواتە $x=-3$ وە $r=5$.
بۆ هەژمێركردنی y بیردۆزی فیثاگۆرس بەكاربهێنە.

$$5^2=(-3)^2+y^2$$
$$y^2=25-9=16$$
$$y=\pm\sqrt{16}=\pm4$$

$y=4$ $\quad$ $y>0$ $\quad$ $P(x,y)$ دەكەوێتە چارەگی دووەم

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{4}{5}$ $\quad$ $\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{4}{-3}=-\frac{4}{3}$

هەوڵبدە $\cos\theta$ و $\tan\theta$ هەژمێربكە ئەگەر بزانی گۆشەیθ لەباری پێوانەییدایە وكۆتالاكەی دەكەوێتە چارەگی سێیەم و $\sin\theta=-\frac{4}{5}$.

ئەگەر كۆتالاكەی گۆشەی θ لەباری پێوانەییدا لەگەڵ تەوەری صادی $(x=0)$ جووت بێت ئەوا $\tan\theta$ پێناسە نەكراوە.

خاڵی چاودێری ✓ هەژمێرەی ڕێژە سێگۆشییەكانیٚ گۆشەی$\theta=90^\circ$ بكە.

ڕاهێنـــــــــان

بەردەوامبوون لە بیر كاریدا

1 جیاوازی چییە لەنێوان گۆشەكانی سێگۆشەی وەستاو و گۆشەكانی خولانەوە؟

جێبەجێکردن

2 ئەو جیاوازییانەی هەیە لە نێوان ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەیەك و ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی گەڕانەوەکەی چییە؟ هۆیەکانی ئەم جیاوازییانە چییە؟

3 ئایا پێویستیت بە زانینی پێوانەی گۆشەیەك هەیە بۆ ئەوەی هەژمێری ڕێژە سێگۆشەییەکانی بکەیت؟ هۆی وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.



ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

4 **فڕۆکەوانی** پەروانە گەورەکەی فڕۆکەی هەلیکۆپتەرێك 430 خول لە خولێکدا دەخولێتەوە. خاڵێك لەسەر پەروانەی ئەو فڕۆکەیە لە چرکەیەکدا چەند پلە دەخولێتەوە.

5 گۆشەی گەڕانەوە بۆ هەریەك لەم گۆشانە $93°$ ، $280°$ ، $-36°$ دیاربکە.

6 خاڵی $P(3, -2)$ دەکەوێتە سەر کۆتالای گۆشەی θ لەباری پێوانەییدا. هەژمێری ڕێژە سێگۆشەییەکانی ئەو گۆشەیە بکە.

7 هەژمێری $\cos\theta$ و $\tan\theta$ بکە ئەگەر بزانی گۆشەی θ لەباری پێوانەییدا. و کۆتالاکەی دەکەوێتە چارێگی سێیەم و $\sin\theta = -\frac{12}{13}$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

هەر گۆشەیەك لەباری پێوانەیی بکێشە.

8 $115°$ 9 $280°$ 10 $-300°$ 11 $-130°$

گۆشەی گەڕانەوە بۆ هەریەك لەم گۆشانە دیاریبکە.

12 $35°$ 13 $23°$ 14 $112°$ 15 $160°$

16 $612°$ 17 $478°$ 18 $-135°$ 19 $-315°$

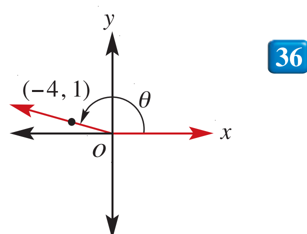
20 $90°$ 21 $-180°$ 22 $-450°$ 23 $-485°$

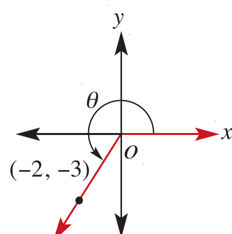
24 $540°$ 25 $270°$ 26 $225°$ 27 $195°$

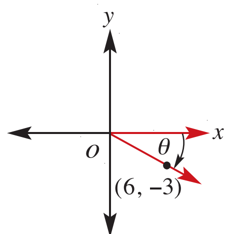
28 $410°$ 29 $560°$ 30 $-120°$ 31 $-280°$

32 $-175°$ 33 $-295°$ 34 $-395°$ 35 $-540°$

هەژمێری ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی θ بکە.

36


37


38


ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی θ هەژمار بکە لە باری پێوانەییدا ئەگەر زانیت ئەم خاڵە دراوانە دەکەونە سەر کۆتالاکانی.

39 $(3, 4)$ 40 $(5, 2)$ 41 $(-4, 2)$ 42 $(-4, 6)$

43 $(\sqrt{3}, -3)$ 44 $(2\sqrt{5}, -1)$ 45 $(-4, -3)$ 46 $(-1, -8)$

ئەگەر ڕێژەی سێگۆشەیی ئەو چارێگەی کۆتالاکەی گۆشەکە بزانیت لەباری پێوانەییدا ئەوا بەهای هەر ڕێژەیەکی سێگۆشەیی داواکراو هەژماربکە.

47 چارێگی یەکەم؛ $\cos\theta = 0.25$ ؛ $\tan\theta$

48 چارێگی سێیەم؛ $\cos\theta = -0.50$ ؛ $\tan\theta$

49 چارێگی چوارەم؛ $\tan\theta = -1$ ؛ $\sin\theta$

50 چارێگی یەکەم؛ $\tan\theta = 2$ ؛ $\sin\theta$

51 چارێگی سێیەم؛ $\sin\theta = -0.50$ ؛ $\cos\theta$

52 چارێگی دووەم؛ $\sin\theta = 0.40$ ؛ $\cos\theta$

ژمارەی خولە تەواوەکان یان ئەو بەشانەی کە گۆشەکە دەیاننوێنێت دیاربیکە.ئاراستەی خولانەوە دیاربیکە لەگەڵ میلی کاتژمێر یان بە پێچەوانەوە.

53 45°	**54** 90°	**55** -180°	**56** -270
57 450°	**58** 720°	**59** -420°	**60** -640

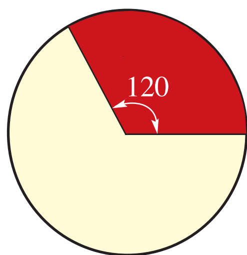
بەرەنگاری

61 هەژمێری $\cos\theta$ بکە ئەگەر بزانی $\sin\theta = 0.375$ $\tan\theta < 0$

62 هەژمێری $\tan\theta$ بکە ئەگەر بزانی $\cos\theta = 0.809$ $\sin\theta < 0$

بەستنەوە

63 **ئەگەر** ئەگەری ئەوەی ئازاد تیرەکەی بچەقێتە بەشە سورەکەوە چەندە؟



جێبەجێکردن

64 **ئەندازە** پەروانەی یەکێك لە فڕۆکەکان 900خول لە خولەکێکدا دەخولێتەوە. خاڵێك لەسەر ئەم پەروانەیە لە چرکەیەکدا چەند پلە دەخولێتەوە؟

65 **دەریاوانی** کاپتنەکانی پاپۆڕەکان و فڕۆکەکان یەکەیەکی درێژی بەکاردەهێنن کە پێی دەڵێن (میلی دەریایی) بۆ پێوانەی دووریەکە. میلی دەریایی بەنزیکەیی یەکسانە بە درێژی کەوانەیەك لەسەر گۆی زەوی کە دیاریکرابێت بە چەقە گۆشەیەك کە پێوانەکەی یەك خولەك بێت(هەر60 خولەك یەکسانە بە یەك پلە) تیرەی زەوی لەهێڵی کەمەربەند 12756 km کم بەنزیکەیی.

أ چێوەی زەوی هەژمێربکە لە هێڵی کەمەربەند.

ب چەند خولەك یەکسانە بە چێوەی زەوی؟

ج چەند کیلۆمەتر یەکسانە بە میلی دەریایی؟

ڕوانین بۆ دواوە

66 $x^2 - 8 = 188$ شیکاربکە.

67 چەند ڕێگا هەیە بۆ هەڵبژاردنی 4 کەس لە 10 کەس؟

ڕوانین بۆ پێشەوە

ڕێژە سگۆشەییەکانی گۆشەی θ لە باری پێوانەییدا هەژمار بکە، ئەگەر بزانی ئەم خاڵە دراوانە دەکەونە سەر لای کۆتایی گۆشەکە.

68 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **69** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **70** $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

وانەی 3

پێوانەی بازنەیی Radian Measure



ئامانجەکان

- پێوانەی شەستی دەگۆڕێ بۆ پێوانەی بازنەیی و بە پێچەوانەشەوە
- درێژی کەوانەیەك لەسەر بازنە هەژماردەکات.

بۆچی؟ پێوانەی بازنەیی بەکاردێنێت بۆ باسکردنی رووداوە خولییەکان وەك شەپۆلەکانی بۆمەلەرزە و گۆڕانکارییەکانی کەش وەهوا وجولانەوەی بازنەیی تەنەکان وەك مانگە دەستکردەکان

جێبەجێکردنەکان

کەشناسی

بازنەی یەکە

ئەو مانگە دەستکردەی کە کەش وەهوا دەستنیشاندەکات لەبەرزی 750 35 کلم بەنزیکەیی لە گۆی زەوییە دەسورێتەوە. ئایا **خێرایی هێڵی Linear Speed** مانگەکە چەندە؟ ئەگەر هەر 24 کاتژمێر جارێك بەدەوری زەویدا بسورێتەوە **گۆشەخێراییەکەی** چەندە؟

لەپۆلەکانی پێشوودا فێربوویت کە گۆشەکان بە پلە بپێویت بەڵام لەم وانەیەدا پێوانەیەکی نوێ فێربوویت بۆ پێوانی گۆشە پێی دەوترێت **پێوانەی بازنەیی کە یەکەی پێوانەکەی بریتییە لە رادیان**. بەڵام سیستمی پێوانە بە پلە پێی دەوترێت **پێوانەی شەستی**.

چالاکی

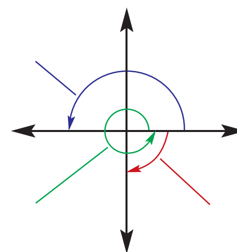
دۆزینەوەی رێژەی بازنەیی Exploring Radian Ratio

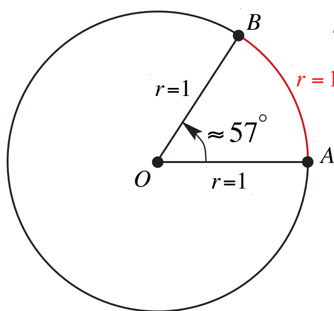
پێویستیت بە شریتێکی سەنتیمەتری و چەند قووتوویەکی لوولەکی هەیە.

1. تیرەی بنکەی ژمارەیەك لەو قووتووانە کە پێوانەکانیان جیاوازە بپێوە و چێوەی هەر یەکێکیان بپێوە. ئەم ئەنجامانەی دەستتکەوتوە لە خشتەیەك دابنێ.
2. هەژمێری رێژەی چێوە بۆ تیرەی بنکەی هەر قووتوویەك بکە و ئەوانە لە خشتەکەدا بنووسە.
3. بەهاکانی هەموو ئەو رێژانە نزیکدەبنەوە لە بەهایەك کە ژمارەیەکی بەناوبانگە و دەیزانین. ئەو ژمارەیە چییە؟

خاڵی چاودێری ✓

چێوەی بازنە $= 2\pi r$ ،لەبەر ئەوەی نیوەتیرەی بازنەی یەکە یەك یەکەیە ئەوا چێوەی بازنەکە $= 2\pi$.





ڕادیان(گۆشەی نیوەتیرەیی) بەوە پێناسە دەکرێت کە پێوانەی چەقە گۆشەیەکە لە بازنەیەك نیوەتیرەکەی r و کەوانەیەك درێژییەکەی r دیاریدەکات ئەگەر بازنەی یەکەت بەکارهێنا. ئەوا گۆشەی نیوەتیرەیی پێوانەی چەقە گۆشەیەك لەبازنەیەکی یەکەییدا کەوانەیەك دیاریدەکات کە درێژیەکەی 1 بێت.لەم پێناسەیەوە ئەوەمان دەستدەکەوێت کە پێوانەی بازنەیی بۆ گۆشەیەکی وەستاوە دەکاتە چارێگی چێوەی بازنەی یەکە. کەواتە $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ گۆشە نیوەتیرەییە، و پێوانەی گۆشەیەکی خول تەواو دەکاتە 2π گۆشە نیوەتیرەیی بەواتایەکی تر:

یەك گۆشەی نیوەتیرەی $\frac{1}{2\pi} \times 360^\circ \approx 57^\circ$

گۆڕینی پێوانە گۆشەیەك	
لەپلەك بۆ گۆشەی نیوەتیرەیی	لە گۆشەی نیوەتیرەیی بۆ پلەك
لە $\frac{\pi}{180}$ ی بدە	لە $\frac{180}{\pi}$ ی بدە

نموونە 1

ئەمانە بگۆڕە لە پلەوە بۆ گۆشەی نیوەتیرەیی یان لە گۆشەی نیوەتیرەیی بۆ پلە.

أ 40° ب 3π گۆشەی نیوەتیرەی

شیکار

أ $40^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{9}$ ب $3\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 540^\circ$

هەوڵبدە -120° بگۆڕە بۆ گۆشەی نیوەتیرەیی و $-\frac{2}{3}\pi$ بگۆڕە بۆ پلەك.

خاڵی چاودێری ✔ گۆشەیەك پێوانەکەی 1° . پێوانەکەی بەگۆشەی نیوەتیرەی چەندە؟

نموونە 2

هەژمێری ئەم ڕێژە سێگۆشاییانە بکە.

أ $\sin\frac{\pi}{3}$ ب $\cos\frac{3\pi}{4}$ ج $\tan\frac{4\pi}{3}$

شیکار

دەستبکە بە گۆڕین لە گۆشەی نیوەتیرەییەوە بۆ پلەك پاشان هەژماری ڕێژە سێگۆشییەکان بکە.

أ $\frac{\pi}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 60^\circ$

$\sin\frac{\pi}{3} = \sin 60^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

ب $\frac{3\pi}{4} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 135^\circ$

$\cos\frac{3\pi}{4} = \cos 135^\circ$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ج $\frac{4\pi}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 240^\circ$

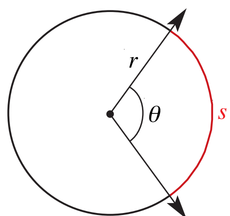
$\tan\frac{4\pi}{3} = \tan 240^\circ$

$= \sqrt{3}$

هەوڵبدە ئەمانە هەژمێربکە: $\tan\frac{5\pi}{4}$ ، $\cos\frac{2\pi}{3}$ ، $\sin\frac{3\pi}{2}$

خاڵی چاودێری ✔ گۆشە تایبەتییەکان ئەم گۆشانەن $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$. بازنەیەکی یەکە بکێشە و گۆشە تایبەتییەکانی لەسەر بکێشە، پێوانەی هەریەکێکیان بنوسە بەگۆشەی نیوەتیرەیی.

Arc Length درێژی کەوانە



شێوەی بەرامبەر بازنەیەك ڕووندەکاتەوە کە نیوەتیرەکەی r و پێوانەی چەقە گۆشەکەی θ گۆشە نیوەتیرەییە. دەتوانیت هاوڕێژە بەکاربهێنیت بۆ دۆزینەوەی ڕێسایەك بۆ هەژمێارکردنی درێژی کەوانەکەی s. کە چەقە گۆشەکە دیاریدەکات:

پێوانەی θ بەگۆشەی نیوەتیرەیی ← $s = r\theta$ → درێژی کەوانەکە

پێوانەی بازنەکە بەگۆشەی نیوەتیرەیی $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{s}{2\pi r}$ چێوەی بازنە

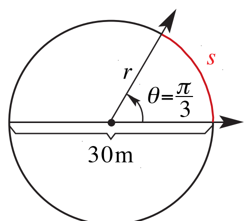
Arc Length درێژی کەوانە

بۆ هەژمێرکردنی درێژی کەوانەیەك s کە چەقی گۆشەیەك دیاریکردووە پێوانەکەی θ گۆشەی نیوەتیرەیە لە بازنەیەك کە نیوەتیرەکەی r . ئەم ڕێسایە بەکاربهێنە. $s = r\theta$

سەرەنجێکی ڕەخنەگرانە ئایا دەتوانیت ئەو پێناسەیەی بۆ گۆشەی نیوەتیرەیی (رادیان)ت کردوە لەوانەی یەکەم لێکبدەیتەوە؟

نموونە 3

هەژمێری درێژی ئەو کەوانە بکە کە چەقە گۆشەیەك گۆشەیەك دیاریکردووە پێوانەکەی $\frac{\pi}{4}$ گۆشەی نیوەتیرەییە لە بازنەیەکدا کە تیرەکەی 30m بێت



شیکار

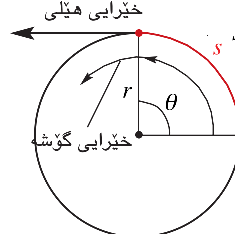
لەبەر ئەوەی تیرەی بازنەکە 30 m ئەوا.

نیوەتیرەکەی یەکسانە بە 15 .

$s = r\theta = 15 \times \frac{\pi}{3} = 5\pi$

کەواتە درێژی کەوانەکە 5π m یان 15.7m بەنزیکیی.

هەوڵبدە هەژماری درێژی ئەو کەوانەیە بکە کە ئەو چەقەگۆشەیە دیاریدەکات کە پێوانەکەی 0.6 گۆشەی نیوەتیرەییە لە بازنەیەك نیوە تیرەکەی 1.25m .





کاتێك تەنێك بە خێرایەکی نەگۆڕ لە ڕێڕەوێکی بازنەی کە نیوەتیرەکەی r دەجولێت ئەوا خێرایی هێڵی **Linear Speed** بۆ ئەو تەنە دەکاتە ڕێژەی درێژی کەوانەیەك s کە تەنەکە دەیبڕێت بۆ کاتی t واتە $\frac{s}{t}$ یان $\frac{r\theta}{t}$ کاتێك θ گۆشەی خولانەوەی تەنەکە دەنوێنێت بە گۆشەی نیوەتیرەیی.

(گۆشە خێرایی) (السرعە الزاویە) بۆ تەنێك بریتییە لە ڕێژەی پێوانە گۆشەی خولانەوەکەی θ بەگۆشەی نیوەتیرەیی بۆکاتی t واتە $\frac{\theta}{t}$.

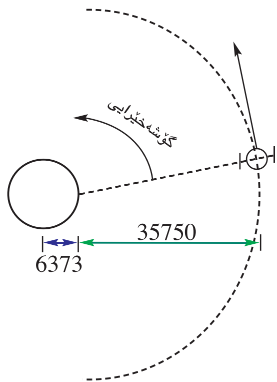
نموونه 4

بەگەڕانەوە بۆ پرسیاری باسکراو لە وانەی یەکەم. هەژمێری خێرایی هێڵی (السرعه الخطیه) وگۆشە خێرایی بۆ مانگێکی دەستکرد بکە ئەگەر بزانی نیوەتیرەکەی یەکسانە بە **6 373** کم بە نزیکەیی.

کەش ناسی

شیکار

دەستبکە بە دۆزینەوەی نیوەتیرەی مانگە دەستکردەکە.



نیوەتیرەی مانگی دەستکرد = نیوەتیرەی زەوی + بەرزی مانگەکە

= 6 373 + 35 750

= 42 123

خێرایی هێڵی بۆ مانگەکە کاتێك هەڵدەستێت بە خولێکی تەواو (2π گۆشە نیوەتیرەیی) لە 24 کاتژمێر خێرایی هێڵی

$$\frac{r\theta}{t}=\frac{42123\times 2\pi}{24}\approx 11028$$

کەواتە خێرایی هێڵی مانگە دەستکردەکە هێڵیە 11 208km کم/کاتژمێر بەنزیکەیی.

ئێستا هەژماری گۆشەخێرایی بۆمانگە دەستکردە بکە بە بەکارهێنانی ڕێسای $\frac{\theta}{t}$.

گۆشەخێرایی $\frac{\theta}{t}=\frac{2\pi}{24}=\frac{\pi}{12}$.

کەواتە گۆشەخێرایی مانگە دەستکردەکە $\frac{\pi}{12}$ گۆشەی نیوەتیرەییە لە کاتژمێرێکدا.

هەوڵبدە هەژمێری خێرایی هێڵی و گۆشە خێرایی بکە بۆ کەسێك لە سەر زەوی کە 6373 کلم دوورە لە چەقەکەوە.

ڕاهێنـــــــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 پێوانەی بازنەیی بۆ گۆشە چییە؟ بەچی جیاوازە لە پێوانەی شەستیەکەی؟

2 چۆن گۆڕانکاری دەکەیت لە گۆشەی نیوەتیرەیی بۆ پلە و بە پێچەوانەشەوە؟

3 چۆن درێژی کەوانەیەك کە سنووردراوە بە چەقەگۆشە لە بازنەیەکدا دەگۆڕێت ئەگەر نیوەتیرەی بازنەکە چەندجارە بکرێت؟

4 خێرایی هێڵی و گۆشە خێرایی بۆ تەنێك کە لەسەر ڕێڕەوێکی بازنەیی بجولێت چییە؟ و جیاوازی چییە لەنێوانیاندا؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەمانە بگۆڕە لە پلە بۆ گۆشەی نیوەتیرەیی یان بە پێچەوانەشەوە.

5 $120°$

6 $\frac{\pi}{4}$ گۆشەی نیوەتیرە

هەژمێری هەریەك لەم ڕێژە سێگۆشەییانە بکە.

7 $\sin\frac{2\pi}{3}$

8 $\cos\frac{5\pi}{4}$

9 $\tan\frac{5\pi}{3}$



10 هەژمێری درێژی ئەو کەوانەیە بکە کە چەقە گۆشەیەک دیاریدەکات پێوانەکەی $\frac{4\pi}{3}$ لە بازنەیەکدا تیرەکەی 90cm بێت.

11 **بۆخۆشی** تیرەی چێشتخانەیەکی خولاوە لە لوتکەی تاورێکدایە 60 مەترە و ئەم چێشتخانەیە سوڕێکی تەواو دەخولێنەوە بە 58 خولەک. خێرایی هێڵی و گۆشەخێرایی پیاوێک کە دانیشتووە لە نزیک پەنجەرەیەک لە پەنجەرەکانی چێشتخانەکە بدۆزەوە.

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئەمانە بگۆرە لە پێوانەی شەستی بۆ پێوانەی بازنەیی.

12	180°	13	90°	14	360°	15	270°
16	-30°	17	-120°	18	-240°	19	-240°
20	720°	21	930°	22	80°	23	160°

ئەمانە بگۆرە لە گۆشەی نیوەتیرەیی بۆ پلە. وەڵامەکەت نزیکبکەوە بۆ نزیکترین بەش لە سەد لە پلە.

24	2π	25	π	26	$\frac{\pi}{2}$	27	$\frac{\pi}{4}$
28	$\frac{\pi}{3}$	29	$\frac{\pi}{6}$	30	$-\frac{\pi}{2}$	31	$-\frac{\pi}{4}$
32	-3.91	33	-9.799	34	9.27	35	4.96

هەژماری هەریەک لەم ڕێژە سێگۆشەییانە بکە .

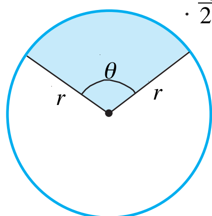
36	$\sin \pi$	37	$\cos \pi$	38	$\cos \frac{\pi}{3}$	39	$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$
40	$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$	41	$\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$	42	$\tan \pi$	43	$\tan \frac{\pi}{4}$
44	$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	45	$\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$	46	$\sin\left(\frac{11\pi}{2}\right)$	47	$\cos 5\pi$

هەژمێری درێژی ئەو کەوانەیبکە کە هەریەک لەم چەقە گۆشانە لەبازنەیەکدان کە نیوەتیرەکەی 10 مەترە

48	3.8 گۆشەی نیوەتیرەیی	49	2.4 گۆشەی نیوەتیرەیی	50	45 گۆشەی نیوەتیرەیی
51	72گۆشەی نیوەتیرەیی	52	4.28 گۆشەی نیوەتیرەیی	53	0.67 گۆشەی نیوەتیرەیی
54	$\frac{\pi}{3}$گۆشەی نیوەتیرەیی	55	$\frac{2\pi}{3}$ گۆشەی نیوەتیرەیی	56	$\frac{\pi}{4}$ گۆشەی نیوەتیرەیی
57	$\frac{\pi}{2}$گۆشەی نیوەتیرەیی	58	$\frac{7\pi}{4}$ گۆشەی نیوەتیرەیی	59	$\frac{7\pi}{6}$ گۆشەی نیوەتیرەیی

بەستنەوە

ئەندازە ڕووبەری کەرتە بازنەیەی کە دیاریکراوە بە چەقە گۆشەیەک کە پێوانەکەی θ گۆشە نیوەتیرەییە بەشێکە لە بە هەی πr^2 لە ڕووبەری بازنەکە $\frac{\theta}{2\pi}$.



$$A = \frac{\theta}{2\pi} \times \pi r^2 = \frac{\theta r^2}{2}$$

60 هەژمێری ڕووبەری کەرتە بازنەیەک بکە کە دیاریکراوە بە چەقە گۆشەیەک پێوانەکەی $\frac{7\pi}{6}$ لە بازنەیەکدا نیوەتیرەکەی 20 m بێت.

61 هەژمێری پێوانەی چەقە گۆشەیەک بکە لە بازنەیەکدا نیوەتیرەکەی 12 cm بێت ئەگەر بزانی ڕووبەری کەرتە بازنەییەکەی گۆشەکەی دیاریکردووە دەکاتە $55.5\ cm^2$.

جێبەجێکردن

ئەندازە فلچەی شوشەی ئوتومبیلێک دەخولێتەوە بەگۆشەیەک پێوانەکەی $\frac{3\pi}{4}$ گۆشەی نیوەترەیی بێت لەهەر 0.9 لە چرکەدا.



62 هەژمێری ئەو دوورییە بکە کە خاڵێک لەسەر کۆتایی بەرزییەکەی و خاڵێک لەسەر کۆتایی نزمییەکەی دەیبڕێت، کاتێک فلچەکە دەخولێتەوە بە $\frac{3\pi}{4}$ گۆشەی نیوەتیرەیی.

63 خێرایی هێڵی بۆ هەریەکە لە دوو خاڵەکەی پێشوو بە سانتیمەتر لە چرکەیەکدا هەژمێربکە، هەژمێری ئەو دوو خێراییە بە کیلۆمەتر لە کاتژمێرێکدا بکە.



تەکنەلۆجیا خوێنەری پەپکە پەستێنراوەکان پەپکەکە دەسووڕێنێتەوە بە گۆشە خێراییەکی نەگۆڕ، بەڵام خێرایی هێڵی بۆ خاڵێك لەسەر پەپکەکە دەگۆڕێت بە پێی نیوەتیرەی ئەو بازنەیەی کە خاڵەکەی لەسەرە. وا دابنێ کە پێدراوەکان نوسراون لە سەر پەپکێك لە ناو بازنەیەك کەتیرەکەی 6 cm بێت.

64 خێرایی هێڵی بۆ خاڵێك هەژمێربکە کە دەکەوێتە سەر لای ئەو بازنەی کە زانیارییەکەی تێدایە. ئەگەر بزانی کە پەپکەکە دەسوڕێتەوە لە کاتی خوێندنەوەی ئەو خاڵە بە 200 خول لە خولەکێکدا:

65 خێرایی هێڵی بۆ خاڵێك هەژمێربکە کە دەکەوێتە دووری 2cm لەلای دەرەوەی بازنەیەك کە زانیارییەکەی تێدایە، ئەگەر بزانی پەپکەکە دەخولێتەوە لە کاتی خوێندنەوەی ئەو خاڵە بە 240 خول لەخولەکێکدا.

پێشبرکێی ئۆتۆمبیلەکان لە گۆڕەپانێکی بازنەیی پێشبرکێیەك دەکەن کە نیوەتیرەکەی 300m ە. یەکێك لە ئۆتۆمبیلەکان کەوانەیەکی بڕی کە پێوانەی چەقە گۆشەکەی 120° لە 17.5 چرکەدا.

66 خێرایی هێڵی ئەو ئۆتۆمبیلە بە مەتر لە چرکەدا هەژمار بکە

67 گۆشەخێرایی بۆ ئەو ئۆتۆمبیلە بە گۆشەی نیوەتیرەیی لە چرکەدا هەژمار بکە.

ڕوانین بۆ دواوە

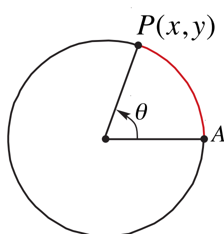
هەر لاسەنگەیەك شیکاربکە. کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

68 $|x-4| \le -2$ **69** $|2-x| > 1$ **70** $|3x+5| < 4$

هەریەکە لەم هاوکێشە ڕێژەییانە شیکاربکە. و پاسادانی شیکارەکە بکە بەهەر ڕێگایەك بێت.

71 $\frac{x-3}{x+5} = \frac{x}{2+1}$ **72** $\frac{y}{y-4} - \frac{y}{y+2} = \frac{5}{y^2-2y-8}$

ڕوانین بۆ پێشەوە



73 هەژمێربکە $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$

هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان
Fundamental Trigonometric Identies

وانەی
4

ئامانجەکان

- هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان دەسەلمێنێ.
- هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان بۆ کورتکردنەوەی برە سێگۆشەییەکان بەکاردێنێت.

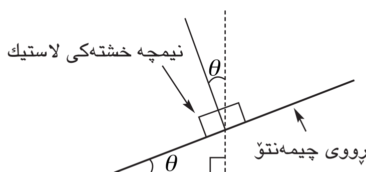
بۆچی؟

دەتوانیت هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان بەکاربهێنیت بۆ نوسینەوەی برێکی سێگۆشەیی بەپێی یەک لە ڕێژە سێگۆشەییەکان، کە ئەمە یارمەتیت دەدات بۆ شیکاری ژمارەیەکی زۆر لە پرسیارەکان لە ژیانی ڕۆژانەدا وەک دیاریکردنی گۆشەی خزان، کەوا لە نیمچە خشتەکێکی لاستیک دەکات کە دانراوە لەسەر ڕوویەکی چیمەنتۆ دەست بەخزاندن بکات.

جێبەجێکردنەکان

فیزیا

لاکێشە تەرییێکی لاستیك دانرا لەسەر ڕوویەکی چیمەنتۆیی. کە دەتوانرێ یەکێك لە لاکانی بە هێواشی بەرزکرێتەوە. گۆشەی چەمانەوە دەبێتە چەند کاتێك لاکێشە تەرییەکە دەستدەکات بە خزان؟ زاناکان ئەم گۆشەیان بەکارهێناوە بۆ دۆزینەوەی هاوکۆلکەی لێکخشاندن **μ_s Coefficient of Static Friction** کەنەگۆڕە m لە نێوان لاستیك و چیمەنتۆیەکەدا .ئەو هاوکۆلکە دەکاتە 1.4 .



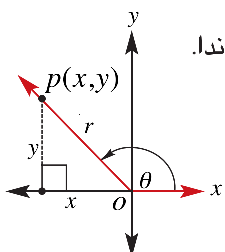
ئەوەی لە خزاندنی لاکێشە تەرییەکە ڕێگری دەکات هێزێکە بریتییە لە بڕی $\mu_s mg \cos\theta$ کە هێمای m هاوکۆلکەی لێك خشاندنە، g بارستایی نیمچە شەشپاڵووەکە و μ_s خێرایی ڕاکێشانە بەڵام ئەو هێزەی پاڵنەری خزاندنەکەیە بەبڕی $mg \sin\theta$ دەردەبڕی و کاتێك دوو هێزەکە یەکسان بن ئەوا.

ئەوا $1.4mg\cos\theta = mg\sin\theta$ ئەم هاوکێشەیە بۆ هەژماری گۆشە θ بەکاربهێنە کە پێی دەوترێت گۆشەی خزان.

هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان **Trigonometric Identities** ئەو هاوکێشانەن کە بەڕاستی دەمێنەیتەوە هەرچەندە گۆڕانکاری لە بەهایەکانی گۆڕاوەکانیاندا بکرێت،لەبیرت بێت کە پۆتانی خاڵێك لەسەر کۆتالاکەی گۆشەی θ لەباری پێوانەییدا ڕێگا دەدات بە هەژمارکردنی ڕێژەی سێگۆشەیەکانی ئەو گۆشەیە وەك خوارەوە:

$x \neq 0$ ، $\tan\theta = \frac{y}{x}$ ، $\cos\theta = \frac{x}{r}$ ، $\sin\theta = \frac{y}{r}$

کاتێك r دووری پۆتانی خاڵەکەیە لە خاڵی بنەڕەت بێت لە ڕووتەختی پۆتاندا.



نموونە 1 ئەم هاوئەنجامە بسەلمێنە $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

شیکار

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{r} \div \frac{x}{r} = \frac{y}{x} = \tan\theta$$

دەتوانێت هاوئەنجامەکانی تر بەهەمان ڕێگا بسەلمێنی یان بە بەکارهێنانی سەلمێنراوی فیثاغۆرس

هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان Fundamental Trigonometric Identities

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \qquad \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

نموونە 2 ئەم هاوئەنجامە بسەلمێنە $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

شیکار

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2+x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

هەوڵبدە ئەم هاوئەنجامە بسەلمێنە: $\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$

دەتوانیت هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان بۆ سادەکردنەوەی بڕە سێگۆشەییەکان بەکاربهێنی و بەپێی یەك ڕێژەی سێگۆشەیی بیانووسی.

نموونە 3 ئەم بڕە $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$ بەپێی یەك ڕێژەی سێگۆشەیی بنووسە .

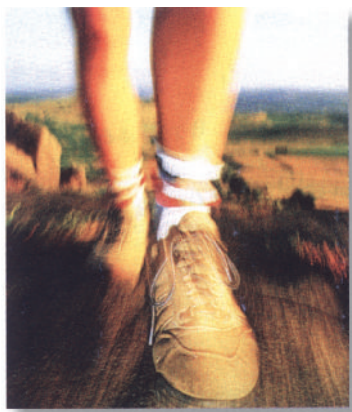
شیکار

$$\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} = \frac{1-\cos^2\theta}{1-\cos\theta} = \frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{1-\cos\theta} = 1+\cos\theta$$

هەوڵبدە ئەم بڕە $\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}$ بەپێی یەك لە ڕێژە سێگۆشەییەکان بنووسە .

نموونە 4

بەگەڕانەوە بۆ پرسیارەکەی سەرەتای وانەکە، یەکسانبوونی $mg \sin \theta = \mu_s mg \cos \theta$ بەکاربهێنەبۆ دیاریکردنی گۆشەی خزاندن لە هەر بارێکدا.



أ خزانی لاستیك لەسەر چیمەنتۆ، $\mu_s = 1.4$

ب خزانی شووشە لەسەر کانزایەکی چەورکراو $\mu_s = 0.25$.

شیکار

أ
$$mg \sin \theta = \mu_s mg \cos \theta$$
$$mg \sin \theta = 1.4 mg \cos \theta$$
$$\sin \theta = 1.4 \cos \theta$$
$$\tan \theta = 1.4$$
$$\theta \approx 54.5^\circ$$

ب
$$mg \sin \theta = \mu_s mg \cos \theta$$
$$mg \sin \theta = 0.25 mg \cos \theta$$
$$\sin \theta = 0.25 \cos \theta$$
$$\tan \theta = 0.25$$
$$\theta \approx 14.0^\circ$$

ڕاهێنـــــــــــان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1 ئەو پەیوەندییە چییە کە sin و cos و tan بەیەکەوە دەبەستێت؟

2 ئەو پەیوەندییە چییە لە نێوان هاوئەنجامی $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ و سەلمێنراوی فیثاگۆرس هەیە؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

3 ئەم هاوئەنجامە بسەلمێنە $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$.

4 ئەم برە $\frac{\cos^2 \theta}{1+\sin \theta}$ بەپێی یەك ڕێژەی سێگۆشەیی بنووسە .

5 $\frac{1}{\tan^2 \theta}$ بەپێی $\sin \theta$ بنووسە.

جێبەجێکردن

6 فیزیا گۆشەی خزان بۆ جۆرێك لاستیك لەسەر چیمەنتۆ دیاریبکە کاتێك $\mu_s = 1.2$.

راهێنان و جێبەجێکردن

بەبەکارهێنانی پێناسەی ڕێژە سێگۆشەییەکان ئەو هاوئەنجامانە بسەلمێنە.

7 $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

8 $\frac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \frac{1}{\tan^2\theta}$

ئەم برە سێگۆشەییانە بە پێی یەك ڕێژە سێگۆشەیی بنووسە.

9 $\frac{\sin\theta}{\tan\theta}$

10 $\tan\theta\cos\theta$

11 $\frac{\tan\theta}{\sin\theta}$

12 $\frac{\tan\theta}{\cos\theta}$

ئەم برە سێگۆشەییانە بە پێی $\cos\theta$ بنووسە.

13 $2\sin^2\theta - 1$

14 $\left(1+\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\left(1-\sin^2\theta\right)$

15 $\left(1-\frac{1}{\tan^2\theta}\right)\left(1+\frac{1}{\tan^2\theta}\right)$

16 $\frac{\tan\theta}{\sin\theta}$

ئەم برە سێگۆشەییانە بە پێی $\sin\theta$ بنووسە.

17 $\frac{\cos\theta}{\tan\theta}$

18 $\frac{1}{\tan^2\theta}$

19 $\cos^2\theta\tan^2\theta + \frac{1}{\sin\theta}$

20 $\tan^2\theta\sin^2\theta$

هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان بەکاربهێنە بۆ سەلماندنی ڕاستی هەریەك لەمانە.

21 $\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta-1} = -\frac{1}{\cos}$

22 $\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta-1} = -\frac{1}{\sin\theta}$

بەستنەوە

23 هەریەك لە $\tan\theta$ و $\sin\theta$ بەپێی $\cos\theta$ بنووسە

جێبەجێکردن



فیزیا بەگەڕانەوە بۆ پرسیارەکە لێك خشاندنی سەرەتای وانەکە هاوکێشەی $mg\sin\theta = \mu_s mg\cos\theta$ بۆ دیاریکردنی گۆشەی خزان بۆ هەر تەنێك بەکاربهێنە.

24 تەختەی مۆمکراو لەسەر بەفر $\mu_s = 0.14$

25 تەختە لەسەر تەختە: $\mu_s = 0.4$

26 تەختە لەسەر قرمید: $\mu_s = 0.6$

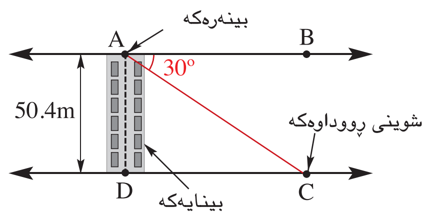
27 ئاوریشم لەسەر ئاوریشم: $\mu_s = 0.25$



ڕوانین بۆ دواوە

28 هێڵکاری ڕونکردنەوەیی نەخشەی $y = 2(x-3)^2 + 5$ بکێشە. پۆتانی سەربڕگە هاوتاکە کامەیە؟

29 لە هێڵکاری بەرامبەردا گۆشەی $\widehat{BAC}$ نزمەگۆشەیە. خاڵی A چاوی کەسێکە لەسەر بینایەک وەستاوە دەڕوانێتە ڕووداوێکی هاتوچۆ لە خاڵی C دا، شوێنی ڕوداوەکە چەند لە خاڵی D بنکەی بیناکەوە دوورە؟ وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەشی سەدی لەمەتر نزیکبکەوە.





ڕوانین بۆ پێشەوە

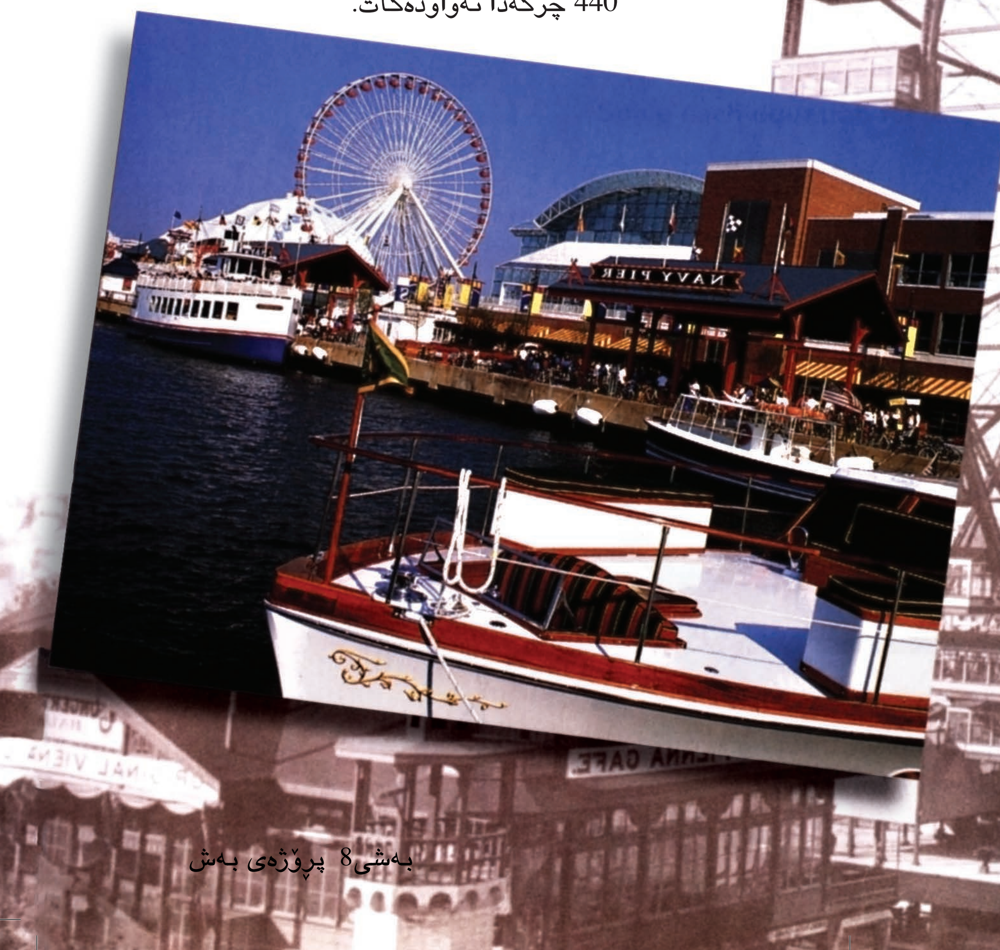
30 لە جیاتی $\sin\theta$ نەزانراوی x لە هاوکێشەی $\sin^2\theta + 2\sin\theta - 3 = 0$ دا دابنێ.ئەو هاوکێشە دووجایەی دەستدەکەوێت شیکاربکە. پاشان بەهای گۆشەی θ بدۆزەرەوە کە پاسادانی هاوکێشە سێگۆشەییەکە دەکات.

بەش
پرۆژەی

چەرخی شاری یاری

لە گرنگترین یارییە خۆشەکانی شاری یاری سواربوونی چەرخە گەورەکەیەتی کە لەوێوە لە بەرزی جیاجیا سەیری دیمەنی شار دەکەیت بە خولانەوەی چەرخەکە ئەو بەرزییە دەگۆڕێت. ئەو کەسەی یەکەم جار نموونەیەکی لەم چەرخە دروستکرد پیاوێکی ئەمریکی بوو بەناوی جۆرج فێریس ئەوەش بەبۆنەی پێشانگایەکی نێودەوڵەتی بوو لە شاری شیکاغۆی ئەمریکا لە ساڵی 1893 زاینیدا تیرەی چەرخێك. لە یەکێك لە شارەکانی یاریدا 40 مەترە و تەوەرەکەی لەبەرزی 21 مەتر دایە ئەم چەرخە 40 کورسی تایبەتی هەڵگرتووە کە هەریەکیان 6 کەس دەگرن چەرخەکە خولێکی تەواو لە 440 چرکەدا تەواودەکات.







چالاکی 1

نموونەیەك بۆ چەرخێكی شاری یاری لە ڕووتەختی پۆتاندا دروستبکە کە تەوەرەی چەرخەکە لە خاڵی بنەڕەتدا بێت. خشتەیەك بۆ بەهاکانی دووری خاڵێك لە لێواری چەرخەکە لە تەوەری سینەکان پێکبهێنە، بۆ هەر سوڕانەوەیەکی چەرخەکە، بەبەکارهێنانی گۆشەکانی سوڕانەوە $0°$ ، $90°$ ، $180°$، $270°$، ... $810°$ لە ڕووتەختی پۆتاندا، هەرجوتێکی ڕێکخراو کە پێکهاتووە لە گۆشەی سوڕانەوە و بەرزییەکەی بنوێنە، کە گۆشەکانی تەوەری سینەکان بگریتەوە خاڵەکان بگەیەنە بۆ کێشانی وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی گونجاو.

چالاکی 2

خشتەیەك دروستبکە بۆ بەهاکانی بەرزی سورابویەك (وای دابنێ لەسەر لێواری دانیشتووە) لە ڕووی زەوییەوە بە گۆڕانی گۆشەی سوڕانەوە. گۆشە سوڕانەوەی چالاکی 1 بەکاربهێنە لە ڕووتەختی پۆتانەکەدا، هەر جووتێکی ڕێکخراو لە گۆشەی سوڕانەوەی بەرزی سواربووەکە لە ڕووتەختی پۆتانەکەدا پێکهاتووە بنوێنە کە گۆشەکانی تەوەری سینیەکان بگرنەوە. خاڵەکان بگەیەنە بۆ کێشانی وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی گونجاو.

چالاکی 3

1 خشتەکەی چالاکی 2 بەکاربهێنە کەچەرخەکە خولێك تەواو دەکات لە 440 چرکەدا، بۆ گۆڕینی یەکەکانی تەوەری سینەکان لە پلەکەوە بۆ کات بەچرکە. لە ڕووتەختی پۆتانەکەدا هەر جووتێکی ڕێکخراوەکە لەکات بە چرکە لەڕووتەختی پۆتانەکەدا هەر جووتێکی ڕێکخراوکە لەکات بە چرکە و بەرزیەکەی پێك هاتووە بنوێنە کە گۆشەکان تەوەرەی سینیەکان بگرنەوە. خاڵەکان بگەیەنە بۆ کێشانی وێنەیەکی ڕوونکردنەوەی گونجاو.

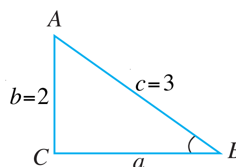
2 خێرایی هێڵی سواربووەکە بە کیلۆمەتر لە کاتژمێرێکدا هەژماربکە.



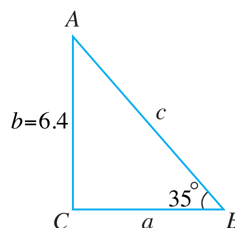
8 پێداچوونەوەی بەش

هەریەك لەم سێگۆشە وەستاوانە شیكاربكە

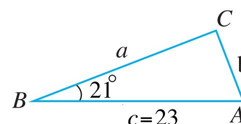
1



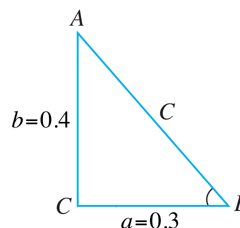
2



3



4



گۆشە گەڕانەوەی هەریەكە لەم گۆشانە دیاریبكە

5 270° **6** 150° **7** -135°

8 -225° **9** 380° **10** 440°

11 $1\,028^\circ$ **12** 973° **13** -515°

ئەم ڕێژە سێگۆشەییانە هەژماربكە.

14 $\cos 135^\circ$ **15** $\sin 315^\circ$

16 $\tan 225^\circ$ **17** $\cos 0^\circ$

18 $\sin(-270^\circ)$ **19** $\cos(-180^\circ)$

20 $\tan(-90^\circ)$ **21** $\cos 675^\circ$

22 $\sin 600^\circ$ **23** $\tan 765^\circ$

خاڵی P دەكەوێتە سەر بازنەیەك چەقەكەی خاڵی بنەڕەتە و نیوەتیرەكەی r و كۆتالاكەی گۆشەی θ بێت لە باری پێوانەییدایە خاڵی p دیاربكە.

24 $\theta = 60$ ؛ $r = 1$

25 $\theta = -30$ ؛ $r = 2$

26 $\theta = 240$ ؛ $r = 5$

27 $\theta = -240$ ؛ $r = 3$

لە پلە بۆ ڕادیان یان لە ڕادیان بۆ پلە ئەمانەی خوارەوە بگۆڕە وەڵامەكان بۆ نزیكترین دە لە پلە نزیكبكەوە.

28 78°

29 334.61°

30 -230°

31 $\frac{\pi}{7}$ ڕادیان

32 $-\frac{15\pi}{16}$ ڕادیان

33 8.87 ڕادیان

34 هەژمێری درێژی ئەو كەوانەیەی سنووردراوە بە چەقەگۆشەیەك پێوانەكەی 30° یە لە بازنەیەكدابكە، كە نیوەتیرەكەی 4.5 مەترە.

هەر بڕێكی سێگۆشەیی لەمانەی خوارەوەدا بەپێی یەكەی ڕێژەی سێگۆشەیی بنووسە.

35 $\cos^2\theta \tan^2\theta$ **36** $\tan^2\theta \frac{1}{\cos^2\theta}$

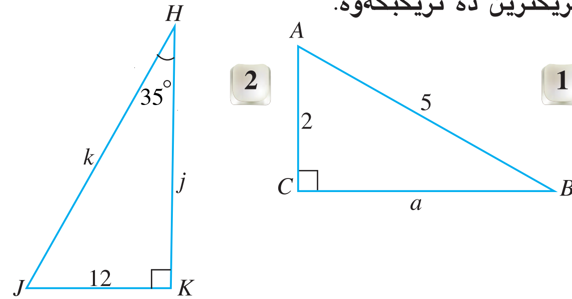
37 $\frac{\cos^2\theta}{\tan^2\theta+1}$ **38** $\frac{\tan^2\theta}{\cos^2\theta-1}$



تاقیکردنەوەی بەش

هەر یەك لەم سێگۆشانە شیکاربکە. باپێوانەی گۆشەکان نزیککراوەبن بۆ نزیکترین پلەو و پێوانەی لاکان بۆ نزیکترین دە نزیکبکەوە.

1 **2**



3 ژینۆ هەشت لایەکی ڕێکی دروستکرد ئەویش بە بڕینی سێگۆشەی لایەکسان لە هەر چوار لوتکەی چوارگۆشەکەوە کە درێژی لایەکی 10 بێت درێژی لایەکی هەشت لایەکە چەندە؟

10cm

بۆ هەریەك لەم گۆشانە ئەگەر هەبوو گۆشە گەراوەکانیان دیاریبکە

4 137° **5** 515° **6** 38° **7** $1\,729^\circ$

هەژماری ئەو ڕێژە سێگۆشەییە داواکراوە بۆ گۆشەی θ بکە بەزانینی ئەو چارێکەی کۆتالا گۆشەکەی تێکەوتووە لە باری پێوانەییدا و زانینی بەهای ڕێژە سێگۆشەییە پێدراوەکان.

8 چارێکی چوارەم $\cos\theta = \frac{5}{13}$ ؛ $\sin\theta =$ ______

9 چارێکی دووەم $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ ؛ $\sin\theta =$ ______

هەریەك لەم ڕێژەی سێگۆشەییانە هەژماربکە. با وەڵامەکەت بە تەواوەتی بێ.

10 $\sin 330^\circ$ **11** $\cos(-150^\circ)$ **12** $\sin 720^\circ$

13 $\tan(-765)$ **14** $\cos 300^\circ$ **15** $\tan 270^\circ$

پۆتانی خاڵی یەکتربڕینی بازنەیەك هەژماربکە. چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و نیوەتیرەکەی r لەگەڵ کۆتالا گۆشەی θ لە باری پێوانەییدا. با وەڵامەکان بەتەواوی بن.

16 $r = 5$ ؛ $\theta = 30^\circ$

17 $r = 12$ ؛ $\theta = 225^\circ$

18 $r = 4$ ؛ $\theta = -150^\circ$

19 $r = 8$ ؛ $\theta = 300^\circ$

20 **چیا** لێژی چیایەك دەکاتە $\frac{7}{12}$ واتە تا لە چیاکە 7 مەتر بەرزبینەوە دووری بەرامبەرەکە 12 مەتری ئاسۆیی دەبێت بەرزە گۆشەی چیاکە چەندە؟

لە پلە بۆ ڕادیان بگۆڕە، و بە پێچەوانە، با وەڵامەکان بە تەواوی بن

21 315° **22** -150° **23** 495°

24 $\frac{\pi}{12}$ **25** $\frac{5\pi}{4}$ **26** $-\frac{5\pi}{3}$

27 **پیشەسازی** تیرەی پانکەیەك 12cmە، بە خێرایی $33\frac{1}{3}$ لە چرکەیەکدا دەخولێتەوە خێرایی هێڵی خاڵێك چەندە کە 4cm لە تەوەری پانکەکەوە دوورە.

هەموو بەها گونجاوەکان بۆ گۆشەی θ هەژمار بکە ئەگەر بزانیت $0 < \theta < 360^\circ$

28 $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **29** $\cos\theta = \frac{1}{2}$

30 $\tan\theta = 1$ **31** $\tan\theta = \sqrt{3}$

هەریەك لەم برانە بەپێی یەك ڕێژە سێگۆشەیی بنووسە.

32 $\frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\tan\theta} \times \cos\theta$

33 $\frac{1}{\cos^2\theta} - \tan^2\theta - \sin^2\theta$

34 $\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$

پۆتانی هەریەك لەو خاڵانە هەژمێربکە بەسوڕانەوە بەدەوری خاڵی بنەڕەت و بە گۆشە پێدراوەکان.

35 (5.8) ؛ 30° **36** (-2.6) ؛ -60°

37 درێژی میلی چرکەژمێرێك 3cm . ئەو دووریە چەندە کە سەرەکەی لە 5 چرکەدا دەیبڕێت.

8

تاقیکردنەوەی کەڵکەبوو

1 بواری نەخشەی $f(x)=\frac{2x-3}{x+1}$ پێکهاتووە لەگشت ژمارەی ڕاستییەکان جگە لە.

أ 1 ب -1 ج $-\frac{3}{2}$ د $\frac{3}{2}$

2 کام لە زۆرڕادەکانی خوارەوە یەکسانە بە زۆر ڕادەداری.

$$\left(2x^3-x^4\right)+\left(3x^2-5\right)-\left(x^2-x^4+1\right)$$

أ $-2x^4+2x^3+3x^2-6$

ب $2x^3+2x^2$

ج $2x^3+2x^2-4$

د $2x^3+2x^2+4$

3 پۆی سینی سەری بڕگە هاوتای $f(x)=2x^2-4x+1$ کامەیە؟

أ -1 ب 1 ج 2 د $-\frac{1}{2}$

4 کام لەم ژمارانە ناکرێت بە شێوەی ڕێژەی دوو ژمارەی تەواو بنووسرێت.

أ خۆبەش   ب تەواو

ج ڕێژەیی   د ناڕێژەیی

5 شیکاری $|2x+5|=11$ دەکاتە.

أ $-3;\ 3$ ب $-8;\ 8$

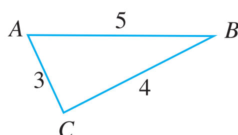
ج $-8;\ 3$ د $-3;\ 8$

6 دوو گوڕاوی x و y پەیوەستن بەیەکتریەوە بە گۆڕانێکی ڕاستەوانە. نەگۆڕی گۆڕانەکە لەم پەیوەندییەدا کامەیە ئەگەر بزانیت $y=8$ کاتێك $x=4$

أ $\frac{1}{2}$ ب 2 ج 32 د -2

7 بەهای بڕی $3\left(\sqrt{45}\right)^2$ چەندە؟

ئەم سێگۆشەیە بەکاربهێنە بۆ هەژماری ڕێژەی سێگۆشەییەکانی.



8 $\sin A$

9 $\cos A$

10 $\tan B$

11 $\sin B$

12 یاسا «دەستوور» بەکاربهێنە بۆ شیکاری هاوکێشە دووجای $5x^2+x-2=0$.

13 ئەم لاسەنگە ڕێژەییە $\frac{5}{x-3}>\frac{6}{x-2}$ شیکاربکە.

14 بە شێوەی گشتی هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بدۆزەرەوە کە بە خاڵی $(-3, 4)$ دا دەڕوات و لەسەر ڕاستەهێڵی $y=3x-5$ ئەستوونە.

15 بڕی $\frac{6x^2}{3x+12}\div\frac{x}{x+4}$ سادەبکە.

16 بواری نەخشەی $f\left(x\right)=\sqrt{2-3x}$ دیارییبکە؟

17 بڕی $3y\left(5x+2\right)-4\left(5x+2\right)$ شیتەڵ بکە.

18 بەهای $\sin\frac{\pi}{2}$ چەندە؟

19 گۆشەی گەڕانەوەی سەر بەگۆشەیەك پێوانەکەی 640° بێت چەندە ؟

20 **ئەگەر** بەچەند ڕێگا دەتوانیت سەرۆك و جێگری سەرۆك هەڵبژێریت لە دەستەیەك کە پێکهاتووە لە 15 ئەندام

21 دوا ژمارە لە شێوازی 50، 46، 24 ، ... کامەیە ؟

22 $\frac{3\pi}{5}$ لە ڕادیان بگۆڕە بۆ پلە.

23 ئەو گۆشەیە کامەیە کە بە $\cos 0=\sin 30^\circ$

24 **ئەگەر** بڕوا بەردەزارێکی هەڵدا. ئەگەری دەستکەوتنی ژمارەی جووت یان ژمارە 1 چەندە؟